TD 0 : Matrices

Exercice 1
Calculer, lorsque c'est possible, $3A$, $2B$, A', B', $A+B$, AB et BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Calculer, lorsque c'est possible, A', B', $A+B$, AB et BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Calculer, lorsque c'est possible, $A+B$, AB et BA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4
Soient les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^4$,

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les normes euclidiennes de ces trois vecteurs.
2. Calculer les produits scalaires entre u et v (noté $< u, v >$), puis $< u, w >$ puis $< v, w >$.
3. Calculer lorsque c'est possible $u'v$, uv' et uv.
4. Calculer lorsque c'est possible $u'w$, $w'u$ et uw.
5. Calculer lorsque c'est possible $v'w$, vw'.

Exercice 5
Nous notons $\mathbf{1}_n$ le vecteur de taille n dont toutes les coordonnées valent 1. Considérons la matrice A et le vecteur $\mathbf{1}_3$ et calculer, lorsque c'est possible, $A+\mathbf{1}$, $A\mathbf{1}$, $\mathbf{1}A$, $\mathbf{1}'A$ et $(1/3)\mathbf{1}'A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6
Soit X une matrice de taille $n \times p$. Nous notons la première colonne de X, X_1, la seconde X_2 et ainsi de suite. La matrice X peut donc s'écrire $X = (X_1|X_2|\dots|X_p)$.

1. Comment faites-vous pour avoir le vecteur des moyennes des colonnes d'une matrice X ? des lignes d'une matrice X ?
2. Comment faites-vous pour centrer une matrice X (enlever à chaque colonne sa moyenne) ?

Exercice 7
Soit X une matrice de taille $n \times p$. Nous notons la première colonne de X X_1, la seconde X_2 et ainsi de suite. La matrice X peut donc s'écrire $X = (X_1|X_2|\dots|X_p)$. Nous notons également $X_{(i)}$ la matrice X privée de sa i$^{\text{ème}}$ ligne et x_i la transposée de sa i$^{\text{ème}}$ ligne.

1. Quelle est la taille de la matrice $X'X$?
2. Quel est le terme général de la matrice $X'X$?
3. La matrice $X'X$ est-elle symétrique ?
4. Quelle est la taille de la matrice $X'_{(i)}X_{(i)}$?
5. Quelle est la taille de x_i ?
6. Montrer que
$$X'X = X'_{(i)}X_{(i)} + x_i x_i'.$$

Exercice 8
La matrice X vaut $X = (\mathbf{1}_?|X_2|X_3)$. Nous ne connaissons pas le nombre de lignes de cette matrice. Nous avons obtenu les résultats suivants :

$$X'X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ ? & 9.3 & 5.4 \\ ? & ? & 12.7 \end{pmatrix} \qquad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1428 & -0.0607 \\ 0 & -0.0607 & 0.1046 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs manquantes.
2. Que vaut n, le nombre de lignes de X ?
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire empirique entre X_2 et X_3.

Exercice 9
Trouver deux matrices A et B telles que l'on ait à la fois :

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -i \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 11
Montrer, avec le moins de calculs possible, que :

a) $\begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ est divisible par 17, c) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = -1487600$

Exercice 12
Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13
Je sais que $X'X\beta = X'y$. Comment faites-vous pour trouver β ? Pouvez-vous trouver β avec les matrices suivantes :

$$X'X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 30 & 10 \\ 0 & 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}, \quad X'y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

On admettra que

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 15 & 30 & 10 \\ 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13720} \begin{pmatrix} 1100 & -560 & 30 \\ -560 & 784 & -140 \\ 30 & -140 & 375 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14
Soit M une matrice symétrique régulière de taille $p \times p$ et u et v deux vecteurs de taille p. Nous supposerons que $u'M^{-1}v \neq -1$, alors nous avons l'inverse suivante

$$\left(M + uv'\right)^{-1} = M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + u'M^{-1}v}.$$

Exercice 15
En calculant de deux façons différentes le produit $D\Delta$ des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix},$$

démontrer que $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2$.

Exercice 16
Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont inversibles ? Calculer leur matrice inverse.

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$$

Exercice 17
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a & -a^2+1 & -a^2+a-1 \\ -a+2 & a^2+1 & a^2-a+1 \\ a-2 & a^2-1 & a^2+a-1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 18
Ecrire sous forme matricielle les systèmes linéaires suivants. Résoudre, lorsque c'est possible, en discutant selon les valeurs des paramètres m, p, a, b, c et d.

$$a) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & z & = & a \\ x & + & my & + & z & = & b \\ x & + & y & + & mz & = & c \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 3m-2 \\ -x & + & my & + & 2z & = & 2m \\ x & + & 2my & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \quad d) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (2m-1)z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 3(m+1) \end{array} \right.$$

$$e) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (m+2)x & & & & & & & = & a \\ & & 2y & - & z & + & mt & = & b \\ -2mx & + & my & + & (m+1)z & + & mt & = & c \\ 2x & - & 2y & + & (m+2)z & & & = & d \end{array} \right. \quad f) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a^2x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & aby & + & bz & = & ab \\ a^2x & + & aby & + & z & = & a^2 \end{array} \right.$$

Exercice 19
m désigne un paramètre réel. On note A la matrice :

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ m-1 & -2 & m-3 \\ -1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A (en discutant selon les valeurs de m)
2. On suppose m choisi de telle façon que le rang de A soit 3. Calculer, en fonction de m, les 5 termes de la matrice inverse A^{-1} qui occupent la première colonne et la première ligne de A^{-1}.

TD 1 : Bases et applications

Exercice 1 (sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$)
Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :
- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$;
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 1\}$;
- $A_3 = \{(a + b, a - b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (sous-espaces vectoriels de $Fonct(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)
On rappelle que $Fonct(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants de $Fonct(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, lesquels forment des sous-espaces vectoriels ?
- $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est paire}\}$;
- $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est impaire}\}$;
- $F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}$;
- $F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 1\}$;
- $F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_4)$ une famille libre de E.
1. Que savez-vous sur la dimension de E ?
2. Les familles suivantes sont-elles libres :

$$(u_1, u_2, 0, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3 + u_4, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3), \quad (u_1, u_2 + u_3, u_4).$$

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_4)$ une famille génératrice de E.
1. Que savez-vous sur la dimension de E ?
2. Les familles suivantes sont-elles génératrices :

$$(u_1, u_2, u_3, 0, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3 + u_4, u_4)$$

Exercice 5
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer si les familles sont génératrices, libres, liées, forment des bases. Si la famille est une base, calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base :

$$u_1 = (1, 2, 3)', u_2 = (4, 0, -1)' \text{ et } u_3 = (3, 7, 9)',$$

puis mêmes vecteurs u_1 et u_2 et $u_3 = (-1, 14, 19)'$.

Exercice 6
Soit f une application linéaire, montrer que : $(\ker f = \{0\}) \iff (f \text{ est injective})$.

Exercice 7
Soient a, b, c, d, des scalaires et f une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Ecrire l'image par f des vecteurs e_1, e_2, base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Calculer l'image par f d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f_1, l'application linéaire où $a = b = c = d = 1/2$.
   (a) Calculer $\ker f_1$, montrer que $f_1 \circ f_1 = f_1$.
   (b) Donner la nature de f_1 et l'ensemble des points invariants par f_1.
   (c) Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y), donner une construction géométrique du point M_1 de coordonnées $f_1(x, y)$.
3. Soit f_2, l'application linéaire où $a = b = c = d = 1$. Donner une construction simple de cette nouvelle application linéaire (penser aux composés d'AL).
4. Soit f_3, l'application linéaire où $a = d = 0$, $b = 1$ et $c = -1$.
   (a) Calculer $\ker f_3$, qu'en déduisez-vous ?
   (b) Donner une construction simple de cette nouvelle application linéaire.
5. Soit f_4, l'application linéaire où $a = 3/4, b = -1/4, c = -3/4$ et $d = 1/4$.
   (a) Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des invariants de f_4.
   (b) Calculer $f_4 \circ f_4$, qu'en déduit-on ?
   (c) Déterminer $M^2_{c,c}(f_4), M^3_{c,c}(f_4)$ et $M^n_{c,c}(f_4)$, expliquer.
6. Sur un même graphique dessiner le point M et les points M_1, M_2, M_3 et M_4 images respectives du point M par les applications f_1, f_2, f_3 et f_4.

Exercice 8
Soit f l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \left(\dfrac{3x - y + 3}{4}, \dfrac{-3x + y + 3}{4} \right). \end{array}$$

Est-ce une application linéaire ?

Exercice 9
Soit $\mathbb{R}^2$ l'espace vectoriel muni de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit f la rotation de centre O$(0, 0)$ et d'angle $\pi/4$ ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire). Ecrire la matrice A de f dans la base canonique. Déterminer le vecteur $\vec{y}$ image par f du vecteur $\vec{x}$ avec $\vec{x} = 9/4\vec{e_1} + 2/3\vec{e_2}$.

Exercice 10
Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes de vecteurs suivants :

$$B: \quad \vec{e_1} = (1, 1, 0)' \quad \vec{e_2} = (1, -2, 1)' \quad \vec{e_3} = (0, 2, 1)'$$

$$B': \quad \vec{e'_1} = (3, 2, 2)' \quad \vec{e'_2} = (0, -3, -1)' \quad \vec{e'_3} = (2, -3, 0)'$$

1. Montrer que chacun d'eux est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de B à B'.
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3} \quad f(\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 4\vec{e_3} + 3\vec{e_1} \quad f(\vec{e_3}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_3} + \vec{e_2}.$$

   Quelle est la matrice représentant f dans la base B'.

TD 2 : Diagonalisation

Exercice 1
Considérons la matrice A de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. Donnez la matrice de l'application linéaire dans la base $\mathcal{B}$ en donnant clairement les matrices de passages.

Exercice 2
Soit $\mathbb{R}^2$ l'espace vectoriel muni de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (i_0, j_0)$. Soit $\mathcal{B}_1 = (i_1, j_1)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ obtenue par rotation de 30 degrés de $\mathcal{B}_0$. Soit f la symétrie orthogonale relativement à la droite Δ de vecteur directeur i_1 ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire).

1. A partir de la Figure 1, écrire la matrice A_0 de f dans la base $\mathcal{B}_0$.

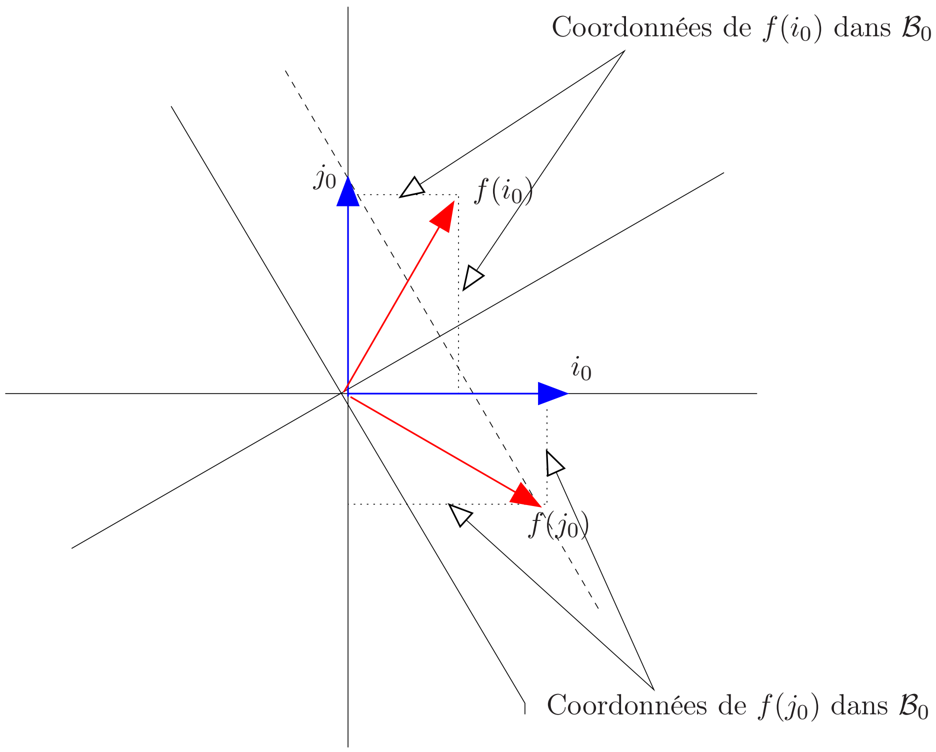

FIGURE 1 – Représentation des bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$.

2. Calculer les coefficients de la matrice de passage P de l'ancienne base $\mathcal{B}_0$ à la nouvelle base $\mathcal{B}_1$. Recalculer A_0 à l'aide de cette matrice de passage.

Exercice 3
Déterminer les valeurs propres λ et les sous-espaces propres E_λ associés (les vecteurs propres seront normés) des matrices suivantes. Dans chaque cas, on précisera la dimension des sous-espaces propres et on donnera, quand ce sera possible, la matrice diagonale ainsi qu'une base dans laquelle la matrice considérée est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4
Calculer A^n pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ vaut :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Que vaut $f(e_1)$ en fonction de e_1, e_2, e_3.
2. Calculer la déterminant de A.
3. Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
4. Expliquer pourquoi la matrice est diagonalisable. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice est diagonale. Indiquer sa forme diagonale dans cette base (notée $\mathcal{B}'$).
5. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base.
6. Donner la relation liant $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ à P et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$. Vérifier cette relation.

Exercice 6
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez les valeurs propres de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
2. Calculez les vecteurs propres de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ (de norme 1). $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est-elle diagonalisable ?
3. Donnez une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale calculez $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.
4. Calculez $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7
Triangulariser la matrice E de l'exercice 3.

TD 3 : Diagonalisation (suite)

Exercice 1 (Système différentiel linéaire)
Vous allez résoudre le système différentiel aux deux fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$ suivant :

$$\begin{cases} x' &= 5x + 16y - 4e^t \\ y' &= -2x - 7y + e^t \end{cases}$$

Vous pouvez écrire ce système sous forme matricielle

$$X' = AX + T \tag{1}$$

avec

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Vous rangerez les valeurs propres dans l'ordre croissant (en premier, la plus petite) et vous choisirez des vecteurs propres dont la première coordonnée vaut 1.
2. Donnez la matrice diagonale D en précisant la base et les matrices de passage P et P^{-1}.
3. Grâce aux résultats obtenus à la question 2), donnez la décomposition de A et remplacer A par cette décomposition dans l'équation (1).
4. Multipliez à gauche par P^{-1} l'équation trouvée lors de la question 3). Soit V une matrice quelconque, vous allez noter $P^{-1}V$ par $\tilde{V}$. Les coefficients de $\tilde{V}$ sont les coefficients de V surmontés du $\sim$.
5. Vérifiez que $P^{-1}T$ vaut $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}$. Vous avez donc maintenant
$$\tilde{X}' = D\tilde{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}.$$
6. Résoudre l'équation différentielle $\tilde{x}' = -3\tilde{x}$.
7. Résoudre l'équation différentielle $\tilde{y}' = \tilde{y} - 4e^t$.
8. Vous venez de calculer $\tilde{X}$, trouvez X.

Bravo, vous venez de résoudre un système différentiel !

Exercice 2 (Système dynamique linéaire)
On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout $n \geq 0$, le système de relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{cases}$$

En vous inspirant du problème précédent (écriture sous forme matricielle, diagonalisation, etc.), déterminez les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3 (Projection et symétrie par rapport à un plan)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2. Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter $\ker(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2. Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g. Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.
10. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $g(M)$.

Exercice 4 (Projection et symétrie par rapport à une droite)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2. Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter $\ker(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2. Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g. Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.

10. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $g(M)$.
11. En remarquant que cette matrice B est l'opposée de la matrice B de l'exercice précédent, retrouver ce point $g(M)$.

Exercice 5 (Chaîne de Markov)
Un petit scarabée se déplace sur un triangle, dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, 3\}$. A l'instant n, s'il est au sommet i, il va vers le sommet j avec la probabilité p_{ij}, où il se retrouve à l'instant $(n+1)$. Si $i = j$, il reste sur place. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$ est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice P.
2. On admet que la probabilité d'être à l'instant n au sommet j sachant que le scarabée est initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) au sommet i est donnée par le terme (i, j) de la matrice P^n. Calculer P^n.
3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P^n$. Interpréter le résultat.
4. Les transitions du scarabée sont maintenant données par la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

   En appliquant la même méthode, déterminer $\lim_{n \to +\infty} P^n$. Interpréter le résultat.

Exercice 6 (Suite de Fibonacci)
On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer V_0, V_1, V_2.
2. Grâce à la relation de récurrence sur $(u_n)_{n \geq 0}$, trouver une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \geq 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire V_n en fonction de V_0, A et n.
4. Diagonaliser A. En déduire V_n, puis u_n.

Exercice 7 (Récurrence d'ordre 3)
On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+3} = \frac{3}{4} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n.$$

1. En reprenant la méthode ci-dessus avec le vecteur V_n défini pour tout $n \geq 0$ par :

$$V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix},$$

   déterminer le terme général u_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

2. Généralisation (récurrence d'ordre p) : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dont on connaît les p premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ et obéissant à la relation de récurrence :
$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$
En vous inspirant de ce qui précède, proposer une méthode pour déterminer u_n.

Exercice 8 (Exponentielle de matrice)
Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp(A)$ la matrice de taille $n \times n$ définie par :
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$
A tout hasard, on rappelle que pour tout réel x, on a : $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. On considère tout d'abord la matrice A définie par
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
2. Calculer valeurs et vecteurs propres de A. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer $\dfrac{D^n}{n!}$. En déduire $\exp(D)$.
4. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et $\exp(D)$. En déduire que :
$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \mathsf{ch}(1) & \mathsf{sh}(1) \\ \mathsf{sh}(1) & \mathsf{ch}(1) \end{bmatrix}$$
(on rappelle que $\mathsf{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x))/2$ et $\mathsf{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$).
5. Par la même méthode, calculer l'exponentielle de la matrice $-A$.
6. Calculer $(\exp(A))^{-1}$. Comparer à $\exp(-A)$.
7. Soit A une matrice de taille $n \times n$, que l'on suppose diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et des λ_i.
8. Montrer que $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.
9. Exprimer $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Déterminer $\det(\exp(A))$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$.
10. On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
La matrice A est-elle diagonalisable ?
11. Calculer A^2, A^3, et A^n pour tout $n \geq 4$. En déduire $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.
12. On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diagonaliser la matrice A et en déduire $\exp A$.
13. Calculer A^2, A^3, et de façon générale A^n. Retrouver le résultat de la question précédente pour $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.

TD 4 : Produit scalaire

Exercice 1 (Distance euclidienne)

1. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique ayant pour coordonnées x_1 et x_2 pour x et y_1 et y_2 pour y. Calculer la distance $d(x, y)$.
2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base (u, v) avec u de longueur l_1, v de longueur l_2 et α l'angle formé par les vecteurs u et v. Calculer $d(x, y)$ en fonction de l_1, l_2 et α.

Exercice 2 (Distances classiques)

Considérons les trois distances classiques de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \\ d_1(x,y) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ d_\infty(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}. \end{aligned}$$

Dessiner l'ensemble des points situés à distance 1 de l'origine.

Exercice 3 (Produit scalaire et orthogonalité)

Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique ayant pour coordonnées x_1 et x_2 pour x et y_1 et y_2 pour y. Montrer que les 2 vecteurs sont orthogonaux si

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Exercice 4 (Forme polaire)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée, définie par $q(u) = \phi(u, u)$. Calculer $q(u + v)$ et en déduire que

$$\phi(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right).$$

Exercice 5 (Inégalités classiques)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy -Schwarz :

$$| < x, y > | \leq ||x|| \times ||y||.$$

2. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

3. Quand y a-t-il égalité dans ces inégalités ?

Exercice 6 (To be or not to be...)

1. Considérons $E = \mathbb{R}^3$, les formes suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$\begin{aligned}
\phi(u,v) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3\\
\phi(u,v) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 - u_3v_3\\
\phi(u,v) &= u_1v_1 + 2u_2v_2 + 4u_3v_3\\
\phi(u,v) &= u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3\\
\phi(u,v) &= 3u_1v_1 + 14u_2v_2 + 8u_3v_3 + 6u_1v_2 - 3u_1v_3 - 4u_2v_3 + 6u_2v_1 - 3u_3v_1 - 4u_3v_2.
\end{aligned}$$

2. Pour chaque ϕ, donnez la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouvez une base dans laquelle la matrice $\tilde{M}$ de ϕ soit diagonale. Donnez ensuite une relation entre les matrices M et $\tilde{M}$.

Exercice 7 (Produit scalaire avec paramètre)
Considérons l'application

$$\phi(u,v) \quad = \quad u_1v_1 + 6u_2v_2 + au_3v_3 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 - 3u_1v_3 - 3u_3v_1,$$

où a est un scalaire.

1. Déterminez a pour que $\phi(u,v)$ définisse un produit scalaire.
2. Donnez la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On fixe $a = 28$. Soit u un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique. On considère le changement de variable

$$\begin{cases} X = x - 2y - 3z\\ Y = y - 3z\\ Z = z \end{cases}$$

   et on note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u a pour coordonnées (X, Y, Z).
   (a) Exprimer la forme quadratique q associée à ϕ en fonction de (X, Y, Z).
   (b) Quelle est la matrice de ϕ par rapport à $\mathcal{B}$? On notera $\tilde{M}$ cette matrice.
   (c) Calculer la base $\mathcal{B}$.
   (d) Donner une relation entre M et $\tilde{M}$.

Exercice 8 (Produit scalaire et matrice symétrique)
La matrice M d'un produit scalaire ϕ est-elle symétrique ?

TD 5 : Orthogonalité

Exercice 1
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

1. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)'$, $v_2 = (-1,1,0)'$ et $v_3 = (1,1,-2)'$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. Soient $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, et $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver les coordonnées dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ des vecteurs suivants $x_1 = (3,-1,1)'$, $x_2 = (-1,1,1)'$, $x_3 = (2,1,-2)'$, $x_4 = (2,-3,1)'$, $x_5 = (1,0,0)'$ et $x_6 = (0,1,-2)'$.

Exercice 2
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $f_1 = (1,1,1)'$ et $f_2 = (1,2,-1)'$. Construisez un base orthonormée de F.

Exercice 3
Considérons E engendré par $e_1 = (1,1,1)'$ et $e_2 = (-1,2,-1)'$ et $e_3 = (0,1,2)'$. Construisez un base orthonormée de E.

Exercice 4
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E, on note U et V les coordonnées de deux vecteurs u et v de E dans $\mathcal{B}$. Soit f un endomorphisme symétrique de E, on note $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer que
$$< f(u), v >=< u, f(v) > .$$
2. Déduire de la question précédente que 2 vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice 5
Montrer que si le vecteur u est orthogonal à un sous-espace F et à son complément orthogonal, alors u est le vecteur nul. En déduire les éléments de $F \cap F^{\perp}$.

Exercice 6
Considérons $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E, considérons un élément u de E. Montrer que si $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ alors

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2.$$

Exercice 7
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $f_1 = (1,1,1)'$ et $f_2 = (1,2,-1)'$. Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F et la matrice de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

Exercice 8
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, donnez la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)'$, notée Π_1 et la matrice de la projection orthogonale sur son complément notée $\Pi_{1^\perp}$. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$, que faites vous quand vous calculez $\Pi_1 u$ et $\Pi_{1^\perp} u$?

Exercice 9
Nous avons n individus. Pour chaque individu, nous mesurons p valeurs représentant des valeurs de variables différentes, par exemple, l'âge, le poids, la taille, temps de travail, assiduité au cours d'algèbre ... (notées de X_1 à X_p). Nous mesurons ensuite une dernière variable comme par exemple la note en analyse notée Y, dont nous pensons qu'elle est liée aux autres variables de manière linéaire. Considérons $E = \mathbb{R}^n$ et F le sous-espace engendré par $X_1, \ldots, X_p$. Donnez la matrice de projection sur F.

Exercice 10
Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace euclidien E. Soient u et v deux vecteurs de E. Etablissez l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. $v = \Pi_F u$
2. $v \in F$ et $\|u - v\| = \inf\{\|t - v\| : t \in F\}$
3. $v \in F$ et $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u - v\|^2$.

Exercice 11
Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $n+1$ nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_n[X]$, posons

$$< P, Q > \quad = \quad P(t_0)Q(t_0) + \cdots + P(t_n)Q(t_n).$$

1. Avec $n = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, calculer $< P, Q >$, $\|P\|$, $\|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 12X^2$ et $Q(X) = 2X - 1$.
2. Dans le cadre général, montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n[X]$.
3. Soit $n = 4$, $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ et $t_4 = 2$. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_4[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$.
   (a) Construisez une base orthogonale de $\mathcal{P}_2[X]$.
   (b) Exprimez les polynômes 1, X et X^2 dans cette base.
   (c) Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^4$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.

TD 6 : Transformations orthogonales et matrices symétriques

Exercice 1
Soit la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x, y) &\mapsto 9x_1y_1 + 24x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1.\end{aligned}$$

Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées dans la base canonique :

$$u = (1, 2)', \quad v = (-2, 4)'.$$

1. Donner la matrice de φ par rapport à la base canonique. On notera M_{can} cette matrice. Calculer $\varphi(u, v)$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire en utilisant la méthode de Gauss.
   (b) A l'aide de la décomposition de Gauss, trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
   (c) Calculer les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$ et en déduire $\varphi(u, v)$.
2. (a) Montrer que M_{can} est orthogonalement diagonalisable.
   (b) Donner une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
   (c) Calculer les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$ et retrouver $\varphi(u, v)$.

Exercice 2
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $f_1 = (1, 1, 1)'$ et $f_2 = (1, 2, -1)'$. On note X la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F en fonction de X.

Exercice 3
Diagonaliser orthogonalement les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 36 & 52 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Critère de Sylvester)
Considérons la forme quadratique $Q(x) = x'Ax$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

1. Montrer que A admet 2 valeurs propres réelles λ_1 et λ_2.
2. Montrez que $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.
3. On suppose que $\det(A) > 0$ et $a > 0$. Montrez que la forme quadratique est définie positive.

Exercice 5 (Racine carrée d'une matrice)
Soit V une matrice symétrique positive, montrez que V peut s'écrire comme le produit d'une matrice S et de sa transposée.

Exercice 6 (Forme quadratique)
Considérons la forme quadratique suivante :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

1. Déterminez A la matrice associée à Q.
2. Diagonaliser orthogonalement A.
3. Transformer Q pour obtenir une forme sans terme produit.

Exercice 7 (Projection et polynômes)
Considérons l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient $t_0, t_1, \ldots, t_3$, 4 nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_3[X]$, posons

$$< P, Q > = P(t_0)Q(t_0) + \cdots + P(t_3)Q(t_3).$$

1. Montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathcal{P}_3[X]$.
2. Soit $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ et $t_3 = 2$. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_3[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$ et $Q(X) = 3X + 2X^2$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.

Exercice 8 (Isométrie et matrice orthogonale)
Soit U une matrice carrée de taille n telle que

$$< Ux, Uy > = < x, y >, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrez que la matrice U est orthogonale.

Exercice 9 (Valeurs propres d'une matrice orthogonale)
Montrez que si U est une matrice orthogonale, alors toute les valeurs propres réelles vallent ± 1.

Exercice 10 (Valeurs propres d'une matrice de projection)
Quelles sont les valeurs propres de la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur F sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 ?

Exercice 11 (Etude spectrale)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix},$$

où m est un réel fixé.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Touvez les valeurs propres et sous-espaces propres de A ?
4. Discutez du rang de A en fonction de m.
5. Trouvez l'inverse de A lorsque l'inverse existe.

Exercice 12 (Produit scalaire et intégrale)
Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_n[X]$, posons

$$< P, Q > \quad = \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Vérifier que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n[X]$ (Indication : on rappelle que l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est nulle ssi la fonction est nulle sur ce segment).
2. Calculer $< P, Q >$, $\|P\|$, $\|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 1$ et $Q(X) = X$.
3. On fixe $n = 2$ et on considère la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathcal{P}_2[X]$. Par le procédé de Gram-Schmidt, construire une base orthonomée de $\mathcal{P}_2[X]$.
4. Exprimez les polynômes 1, X et X^2 dans cette base.
5. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_3[X]$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = X^3$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.