Statistiques

Décembre 2020, 1h45

**Préambule :** Le sujet est composé de cinq exercices indépendants. Le devoir est à faire **seul**, les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Vous devrez scanner ou photographier vos copies et les assembler en **un seul fichier pdf** à déposer sur cursus avant 12h45 (13h25 pour les étudiants bénéficiant d'un tiers-temps).

**Exercice 1**

1. Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$ avec $\theta > 0$.
   (a) Quelle est la densité de $X$ ?
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $X$.
   (c) Calculer
$$\mathbf{P}(X > -\theta),\ \mathbf{P}(X > \theta),\ \mathbf{P}(X = 0),\ \mathbf{P}(X > 0),\ \mathbf{P}(X \geq \theta/2) \text{ et } \mathbf{P}(-\theta/2 \leq X \leq \theta/2).$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ $n$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la loi est définie par
$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1-\theta}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_1 = 2) = \frac{1+\theta}{3}.$$
   avec $\theta \in ]-1, 1[$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de $X_1$.
   (b) En déduire l'estimateur des moments de $\theta$, on le notera $\widehat{\theta}_n$.
   (c) Calculer le biais et la variance de $\widehat{\theta}_n$.
   (d) Est-ce que $\widehat{\theta}_n$ converge dans $L_2$ vers $\theta$ ? Justifier.
   (e) Est-ce que $\widehat{\theta}_n$ converge en probabilité vers $\theta$ ? Justifier.

**Exercice 2**

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires définie sur un même espace de probabilité et dont la loi est donnée par
$$\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$

1. Est-ce que $X_n$ converge en probabilité vers 0 ? Justifier (ou plutôt démontrer le).
2. Est-ce que $X_n$ converge presque surement vers 0 ? Justifier (ou plutôt démontrer le).
3. Est-ce que $X_n$ converge dans $L_2$ vers 0 ? Justifier (ou plutôt démontrer le).

**Exercice 3**

1. Enoncer la loi forte des grands nombres (hypothèses et résultats).
2. Enoncer le théorème central limite (hypothèses et résultats).
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ $n$ variables aléatoires réelles de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Appliquer le théorème central limite à la suite $(\bar{X}_n)_n$ avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
4. Déduire de la question précédente et du théorème de Slutsky un intervalle de confiance asymptotique de niveau 90% pour $\lambda$.

**Exercice 4**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ $n$ variables aléatoires réelles i.i.d dont la loi admet pour densité
$$f(x) = \frac{x}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) \mathbf{1}_{x>0},$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu à estimer. On admettra que les premiers moments de $X_1$ sont donnés par

$$\mathbf{E}[X_1] = \sqrt{\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \mathbf{E}[X_1^2] = 2\theta, \quad \mathbf{E}[X_1^3] = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta^{3/2}, \quad \mathbf{E}[X_1^4] = 8\theta^2.$$

On note $\widehat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$ et $\tilde{\theta}$ celui des moments.

1. Calculer l'estimateur des moments.
2. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance vaut
$$\widehat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$
3. Calculer le biais et la variance de $\widehat{\theta}$.
4. Calculer l'information de Fisher du modèle considéré et en déduire la borne de Cramer-Rao.
5. Pouvez-vous conclure que $\widehat{\theta}$ est VUMSB ? Justifier.

**Exercice 5**

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n$ échantillon composé de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon la loi admettant pour densité

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\mathbf{1}_{]0,\theta]}(x)$$

où $\theta$ est un paramètre strictement positif que l'on cherche à estimer dans cet exercice. On considère l'estimateur $\widehat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calculer la fonction de répartition de $\widehat{\theta}$ et en déduire la densité de $\widehat{\theta}$.
2. Calculer le biais de $\widehat{\theta}$ et la variance de $\widehat{\theta}$. En déduire son risque quadratique.
3. Montrer que $n(\theta - \widehat{\theta})$ converge en loi vers une loi à préciser (**indication :** on pourra calculer la fonction de répartition de $n(\theta - \widehat{\theta})$). On en déduira un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour $\theta$.