

# Statistique

L. Rouvière

*laurent.rouviere@univ-rennes2.fr*

SEPTEMBRE 2021

## Table des matières

<b>I</b>	<b>La modélisation statistique</b>	<b>2</b>
1	Un exemple de modèle	2
2	Quelques exemples de problèmes statistiques	5
3	Modèle statistique	8
4	Quelques rappels de probabilités	9
4.1	Variable aléatoire réelle	9
4.2	Vecteurs aléatoires	12
5	Bibliographie	13
<b>II</b>	<b>Théorie de l'estimation</b>	<b>14</b>
1	Modèle - estimateur	14
2	Biais, variance, risque quadratique	18
3	Quelques méthodes d'estimation	19
3.1	La méthode des moments	20
3.2	La méthode du maximum de vraisemblance	20
4	Information de Fisher	21
5	Annexe : La famille exponentielle	23
6	Bibliographie	24
<b>III</b>	<b>Convergences stochastiques</b>	<b>25</b>
1	Les différents modes de convergence	26
1.1	Convergence presque sûre ou convergence forte	26
1.2	La convergence en probabilité	27
1.3	La convergence en moyenne d'ordre $p$	28
1.4	La convergence en loi	29
2	Lois des grands nombres et Théorème Central Limite	33
2.1	Lois des grands nombres	33
2.2	Le théorème central limite	34
3	Bibliographie	37

<b>IV Critères de performance asymptotiques, intervalles de confiance et estimation multivariée</b>	<b>38</b>
1 Critères asymptotiques	38
2 Estimation par intervalles	39
3 Estimation multivariée	45
3.1 Biais, variance, risque quadratique	46
3.2 Critères asymptotiques	46
3.3 Borne de Cramer-Rao	47
<b>V Approche paramétrique vs non paramétrique pour les modèles de densité et de régression</b>	<b>49</b>
1 Le modèle de densité	52
1.1 Approche paramétrique : le modèle Gaussien	52
1.2 Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau	53
2 Le modèle de régression	57
2.1 Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire	58
2.2 Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau	61
3 Bibliographie	64

## Présentation

- *Objectifs* : Comprendre le problème de la modélisation statistique et acquérir les premières notions fondamentales de la théorie de l'estimation.
- *Pré-requis* : théorie des probabilités, variables aléatoires discrètes et continues.
- *Enseignant* : Laurent Rouvière [laurent.rouviere@univ-rennes2.fr](mailto:laurent.rouviere@univ-rennes2.fr)
  - *Recherche* : statistique non paramétrique, apprentissage statistique
  - *Enseignements* : statistique et probabilités (Université, école d'ingénieur et de commerce, formation continue).
  - *Consulting* : énergie, finance, marketing, sport.

## Programme

- 40h : 20h *CM* + 20h *TD*.
- *Matériel* : slides + feuilles d'exercices. Disponible à l'url : [https://lrouviere.github.io/doc\\_cours/](https://lrouviere.github.io/doc_cours/)
- *5 parties* :
  1. *La modélisation*
  2. *Théorie de l'estimation*
  3. *Convergences stochastiques*
  4. *Critères de performance asymptotique et estimation par intervalles*
  5. *Introduction à l'approche non paramétrique*

## Première partie

# La modélisation statistique

## 1 Un exemple de modèle

Statistique (version Wikipedia)

La statistique est l'étude de la collecte de *données*, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous.

### Conséquence

Plusieurs étapes :

1. Collecte des données
2. Analyse et vérification des données (**statistiques descriptives**)
3. Traitement (**modélisation**)
4. Interprétation des résultats (ou du **modèle**)
5. Présentation des résultats (**visualisation**)

### Un exemple célèbre : les iris de Fisher

#### Question

Pour 3 espèces d'iris différentes, est-il possible d'**expliquer** (ou de **prédire**) l'appartenance à une des espèces connaissant les longueurs et largeurs de sépales ?



### Collecte des données

— On a mesuré sur  $n = 150$  iris les quantités d'intérêts.

```
> data(iris)
> head(iris)
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species
1           5.1         3.5          1.4          0.2  setosa
2           4.9         3.0          1.4          0.2  setosa
3           4.7         3.2          1.3          0.2  setosa
4           4.6         3.1          1.5          0.2  setosa
5           5.0         3.6          1.4          0.2  setosa
6           5.4         3.9          1.7          0.4  setosa
```

```
> summary(iris)
  Sepal.Length   Sepal.Width   Petal.Length   Petal.Width   Species
Min.   :4.300   Min.   :2.000   Min.   :1.000   Min.   :0.100   setosa   :50
1st Qu.:5.100   1st Qu.:2.800   1st Qu.:1.600   1st Qu.:0.300   versicolor:50
Median :5.800   Median :3.000   Median :4.350   Median :1.300   virginica :50
Mean   :5.843   Mean   :3.057   Mean   :3.758   Mean   :1.199
3rd Qu.:6.400   3rd Qu.:3.300   3rd Qu.:5.100   3rd Qu.:1.800
Max.   :7.900   Max.   :4.400   Max.   :6.900   Max.   :2.500
```

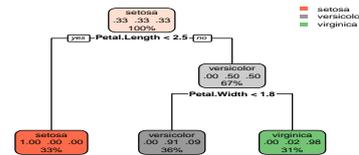
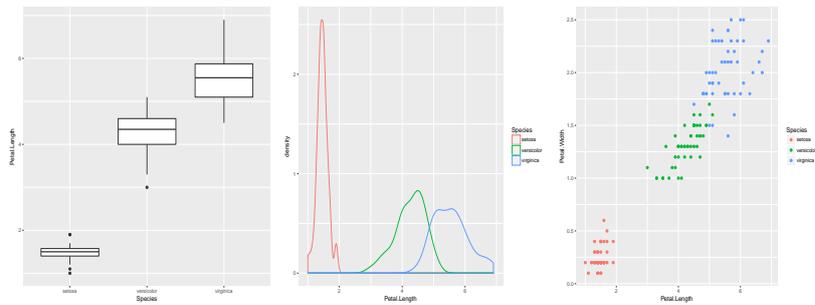
### Statistiques descriptives

— Indicateurs *numériques* et *graphiques* permettant de mieux comprendre le problème.

```
> library(ggplot2)
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Petal.Length)+geom_boxplot()
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,color=Species)+geom_density()
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,y=Petal.Width,color=Species)+geom_point()
```

### Modélisation

- *Modéliser* = créer un objet qui permette d'**expliquer l'espèce** à partir des 4 variables quantitatives.
- On utilise ici un *arbre de classification*



```
> library(rpart)
> model <- rpart(Species~.,data=iris)
```

— que l'on peut visualiser

```
> library(rpart.plot)
> rpart.plot(model)
```

## Prévisions

— On dispose de 5 nouveaux iris sur lesquels on a mesuré les longueurs et largeurs de pétales et sépales.

```
> iris_prev
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
1           5.0          3.6          1.4          0.2
2           5.5          2.4          3.7          1.0
3           5.8          2.7          5.1          1.9
4           5.1          3.5          1.4          0.3
5           6.3          2.9          5.6          1.8
```

— On souhaite connaître (*prédire, estimer...*) l'espèce de chacun.

— On utilise le *modèle* (l'arbre) pour faire ces prévisions.

— Prévisions des *probabilités* d'appartenance aux espèces :

```
> predict(model,newdata=iris_prev)
  setosa versicolor virginica
1      0.000      0.000
2      0.907      0.093
3      0.022      0.978
4      0.000      0.000
5      0.022      0.978
```

— *Prévisions des espèces* :

```
> predict(model,newdata=iris_prev,type="class")
  setosa versicolor virginica  setosa virginica
Levels: setosa versicolor virginica
```

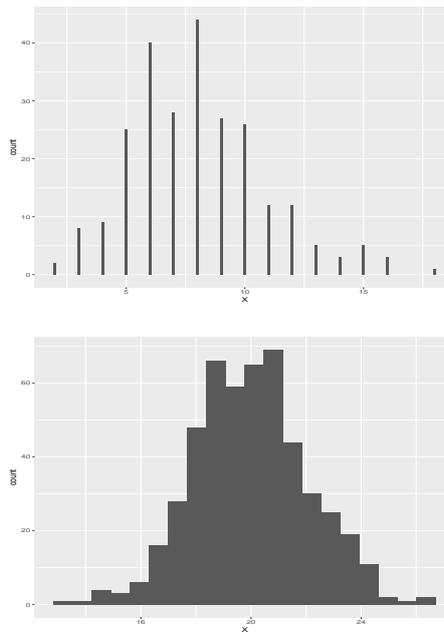
— Chacune de ces étapes est *primordiale* pour le succès d'une étude statistique.

## Dans ce cours

— On va s'intéresser à la phase de *modélisation mathématique* d'un problème.

— On supposera les données *collectées* (c'est en grande partie une affaire de praticien). Elles seront souvent notées  $x_1, \dots, x_n$ .

— Les phases d'*interprétation* et de *visualisation* des résultats seront abordées plus tard.



## 2 Quelques exemples de problèmes statistiques

### Nombre de voitures à un feu rouge

- Afin de mieux gérer la circulation, on s'intéresse au *nombre de voitures* à un feu rouge sur un créneau donné.
- *Expérience* : on compte le nombre de voitures dans la file d'attente à chaque fois que le feu passe au vert.
- On récolte  $n = 250$  observations

5 9 9 9 11 9

#### Question

Comment *utiliser au mieux ces données* pour gérer le feu ?

#### Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la *loi de probabilité* du nombre de voitures arrêtées au feu à ce créneau.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc *inconnue*.
- Le *travail statistique* va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (discrète) à partir des mesures effectuées.

### Durée d'un trajet

- J'ai une réunion à mon travail à 8h, à quelle heure dois-je partir pour "*avoir de grandes chances*" d'être à l'heure ?
- *Expérience* : je mesure la durée de trajet domicile/travail pendant plusieurs jours.
- Je récolte  $n = 100$  observations

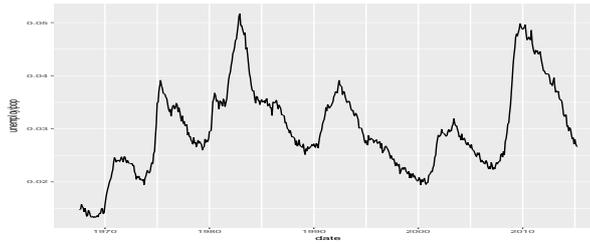
20.87 22.12 20.90 21.33 17.73

#### Question

Comment *utiliser au mieux ces données* pour gérer mon heure de départ ?

#### Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la *loi de probabilité* de la durée de trajet domicile/travail.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc *inconnue*.
- Le *travail statistique* va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (continue) à partir des mesures effectuées.



## Séries temporelles

- On s'intéresse au *taux de chômage* d'une population entre deux dates  $t_0$  et  $t_1$ . On souhaite prédire le taux de chômage futur.
- *Expérience* : on mesure le taux de chômage entre les deux dates

```
> head(economics)
# A tibble: 6 x 6
  date       pce      pop psavert uempmed unemploy
<date> <dbl> <int> <dbl> <dbl> <int>
1 1967-07-01 507.4 198712  12.5  4.5  2944
2 1967-08-01 510.5 198911  12.5  4.7  2945
3 1967-09-01 516.3 199113  11.7  4.6  2958
4 1967-10-01 512.9 199311  12.5  4.9  3143
5 1967-11-01 518.1 199498  12.5  4.7  3066
6 1967-12-01 525.8 199657  12.1  4.8  3018
```

### Question

Comment *utiliser au mieux ces données* pour prédire le taux de chômage en 2012 ?

### Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la *loi de probabilité* du taux de chômage à l'instant  $t$  sachant le taux de chômage avant  $t$ .
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc *inconnue*.
- Le *travail statistique* va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (continue) à partir des mesures effectuées.

## Prévision ozone

- On s'intéresse à la *prévision de la concentration en ozone* dans l'air.
- *Expérience* : on mesure la *concentration en ozone* dans l'air ainsi d'*autres variable* (météo) qui pourraient potentiellement expliquer cette quantité.

```
> head(ozone)
  maxO3  T9  T12  T15 Ne9 Ne12 Ne15  Vx9  Vx12  Vx15 maxO3v vent pluie
20010601 87 15.6 18.5 18.4  4  4  8  0.6946 -1.7101 -0.6946  84 Nord  Sec
20010602 82 17.0 18.4 17.7  5  5  7 -4.3301 -4.0000 -3.0000  87 Nord  Sec
20010603 92 15.3 17.6 19.5  2  5  4  2.9544  1.8794  0.5209  82 Est  Sec
20010604 114 16.2 19.7 22.5  1  1  0  0.9848  0.3473 -0.1736  92 Nord  Sec
20010605 94 17.4 20.5 20.4  8  8  7 -0.5000 -2.9544 -4.3301 114 Ouest Sec
20010606 80 17.7 19.8 18.3  6  6  7 -5.6382 -5.0000 -6.0000  94 Ouest Pluie
```

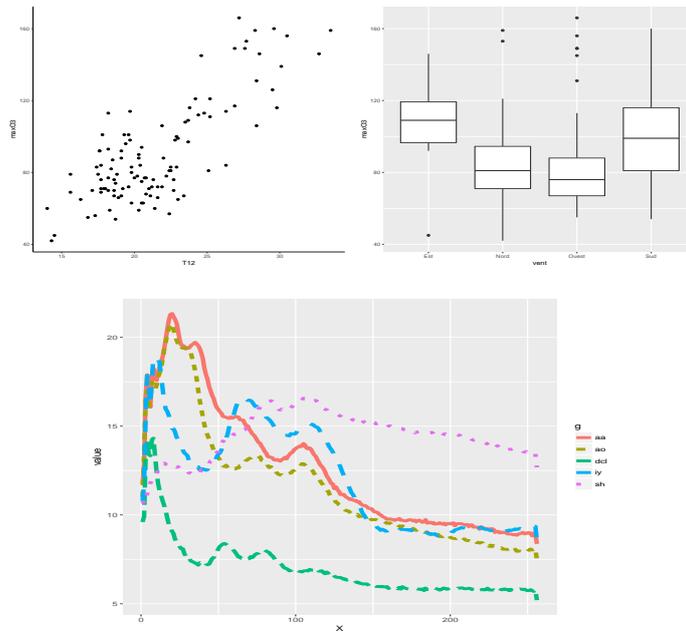
```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()
> ggplot(ozone)+aes(x=vent,y=maxO3)+geom_boxplot()
```

### Question

Comment *utiliser au mieux ces données* pour prédire la concentration en ozone sachant les variables météo ?

### Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la *loi conditionnelle de probabilité* de la concentration en ozone sachant les variables météo.



## Reconnaissance de la voix

- On souhaite développer une procédure *automatique* permettant de reconnaître un son.
- *Expérience* : on prononce 5 sons un certain nombre de fois et on considère la courbe temporelle associée au son dans la base de Fourier.
- On dispose de  $n = 4509$  courbes, chacune étant associée à un son.

### Question

Comment *utiliser au mieux ces données* pour identifier un son à partir d'une courbe ?

### Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la *loi conditionnelle de probabilité* de la variable son sachant la courbe.

### Bilan

- Pour chacun de ces problèmes on cherche à reconstruire (ou *estimer*) des probabilités (ou plus généralement des *lois de probabilité*).
- Les probabilités sont cependant *différentes* : la nature des quantités qui interviennent diffèrent
  - *discrètes* (voitures)
  - *continues* (durée de trajet)
  - *conditionnelles* (ozone, phonèmes)
- Les *objets mesurés* sont également de nature *différente* (entiers, réel, vecteurs, courbes...).

### Conséquence importante

Il va être primordial d'introduire un formalisme (*mathématique*) précis pour représenter (*modéliser*) ces problèmes.

- Ces problèmes peuvent être appréhendés à l'aide d'un *modèle statistique*.

### Modèle statistique

- *Définition avec des mots* : vision simplifiée de la réalité.
- *Définition mathématique* : triplet  $(F, \mathcal{H}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$  où
  - $F$  est un ensemble (l'espace des observations)
  - $\mathcal{H}$  est une tribu sur  $F$
  - $\{P, P \in \mathcal{P}\}$  est une famille de lois de probabilité.

### Question importante

Quel est le *lien* entre ces deux définitions ?

### 3 Modèle statistique

- On suppose que des *données* ont été collectées.
- Ces données sont le résultat d'une *expérience répétée n fois*.
- On va les noter  $x_1, \dots, x_n$ .

#### Exemple des durées de trajet

- Données :

20.87 22.12 20.90 21.33 17.73
-------------------------------

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12 \dots$

#### Hasard, aléa...

##### Question

- Sur les  $n = 100$  trajet, on obtient une *moyenne* de 20.02 minutes.
- Peut-on en *conclure* que la durée moyenne du trajet domicile/travail est de 20.02 minutes ?
- Le résultat dépend des *conditions* de l'expérience.
- Si on *re-mesure 100 fois le trajet*, il est fort possible qu'on n'obtienne *pas la même durée moyenne*.

##### Conséquence

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé *dépend des* conditions expérimentales.
- Ces dernières vont être *difficiles à caractériser précisément*.
- On dit souvent que le *hasard ou l'aléa* intervient dans ces conditions.

#### Variable aléatoire

##### Un outil spécifique

L'outil mathématique permettant de prendre en compte l'aléa dans l'expérience est la *variable aléatoire*.

##### Définition

Une *variable aléatoire réelle (v.a.r.)* est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et une *réalisation de X* est une valeur  $X(\omega)$  pour une éventualité  $\omega \in \Omega$ .

- *Remarque* : la définition d'une v.a. est étrange et ne présente un intérêt que si on comprend son *utilité dans la modélisation*.

#### V.a. et modélisation

- $x_1, \dots, x_n$  représentent le *résultat de l'expérience*. On suppose que  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .
- Pour prendre en compte l'aléa de l'expérience, on va considérer des *variables aléatoires réelles (v.a.r.)*.

##### Lien observation/v.a.r.

Les  $x_i$  sont des *réalisations de v.a.r.  $X_i$* . C'est-à-dire

$$\forall i = 1, \dots, n \exists \omega_i \in \Omega \quad \text{tel que } x_i = X_i(\omega_i).$$

- On suppose donc qu'il existe  $n$  v.a.r.  $X_1, \dots, X_n$  et des éléments  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que

$$x_1 = X_1(\omega_1), \dots, x_n = X_n(\omega_n).$$

##### Question

Que représentent les  $\omega_i$  ?

##### Réponse

- $\omega_i$  représente les *conditions expérimentales* associées à la  $i^e$  mesure, c'est-à-dire toutes les conditions qui permettent "d'expliquer" qu'on a obtenu  $x_i$ .
- Cette quantité n'est généralement *pas caractérisable* (on sait qu'elle existe mais on ne peut pas en dire plus).

### Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\circ}$  temps de trajet.
- L'ensemble  $\Omega$  contient toutes les conditions expérimentales possibles... C'est-à-dire tout ce qui peut se produire sur le trajet (feux, passant qui traverse, vitesse à laquelle on roule...).
- $\omega_i$  correspondant à ce qui s'est produit sur le  $i^{\circ}$  trajet.
- Par exemple  $\omega_1$  représente tout ce qui s'est passé sur le trajet permettant d'expliquer qu'on a mis 20.87 minutes.

### Remarque

On voit bien sur cet exemple qu'il est difficile de caractériser mathématiquement  $\Omega$  et les  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ .

### Récapitulatif

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- Les  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$  sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### Attention

$X_i$  est une variable aléatoire, c'est-à-dire une fonction, et  $x_i$  est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire une quantité déterministe.

### Remarque

- Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  n'ont pas forcément un grand intérêt dans la modélisation.
- La quantité qui va nous intéresser est la loi de probabilité associée à ces v.a.
- C'est cette loi qui nous permettra d'apporter des réponses au problème posé.

## Loi de probabilité

### Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une v.a.r. est représentée par les probabilités  $\mathbf{P}(X \in [a, b])$  avec  $a \leq b$ .

### Intérêt

- La loi de probabilité permet de mesurer tous les événements dans l'espace d'arrivé.
- C'est elle qui va nous intéresser pour comprendre le phénomène qui nous intéresse.

## 4 Quelques rappels de probabilités

### 4.1 Variable aléatoire réelle

#### Fonction de répartition

- La loi de probabilité telle qu'elle est définie précédemment n'est pas facile à manipuler.
- Nécessité de trouver des outils mathématiques qui permettent de la caractériser ou de l'identifier.

#### Définition

Soit  $X$  une v.a.r. On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

#### Propriété

La fonction de répartition  $F_X$  d'une v.a.r.  $X$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$  ;

2.  $F_X$  est une fonction croissante, continue à droite en tout point  $x \in \mathbb{R}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

### Propriété

La fonction de répartition **caractérise la loi de probabilité** d'une variable aléatoire réelle.

- $F_X$  permet de **caractériser la loi de n'importe quelle v.a.r.**
- Il existe d'autres outils pour caractériser les lois qui peuvent dépendre de la **nature de la variable**.
  - **Cas discret** : fonction de masse.
  - **Cas continu** : densité.

### Cas discret

#### Définition

- On dit qu'une v.a.r  $X$  est **discrète** si son support  $\mathcal{S}_X$  est fini ou dénombrable.
- La **fonction de masse** définie par

$$\begin{aligned} \pi_X : \mathcal{S}_X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

- **Exemples** : Bernoulli, binomiale, Poisson...

### Propriété

La fonction de masse **caractérise la loi de probabilité d'une v.a.r discrète**.

### Cas continu

- Généralement pour des v.a.r qui prennent leurs valeurs sur un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  ou une **réunion d'intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

#### Définition

Une v.a.r  $X$  est dite de **loi à densité** si il existe une **densité**  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $a, b$  avec  $a \leq b$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

- **Exemples** : Gaussienne, exponentielle...

### Propriété

La densité **caractérise la loi de probabilité d'une v.a.r continue**.

### Quelques propriétés

- Toute fonction  $f$  positive, continue et qui intègre à 1 est une **densité**.
- **Lien fonction de répartition densité** :  $f_X = F'_X$  sur l'ensemble où  $F_X$  est dérivable.
- Une v.a.r n'est pas forcément discrète ou continue, ça peut aussi être un **mélange des deux**...

### Espérance d'un v.a.r.

#### Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega).$$

#### Interprétation

- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque évènement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité  $\mathbf{P}$ .
- D'où l'interprétation de **valeur moyenne** prise par  $X$ .
- **Problème** : l'espérance dépend de  $\Omega$  que l'on ne peut généralement pas caractériser !
- Le **théorème de transfert** permet de pallier à cette difficulté.

## Calcul en pratique

- On déduit du théorème de transfert un moyen "simple" pour *calculer l'espérance dans les cas discret et continu*.

### Propriété

- Cas discret :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \pi_x(x).$$

- Cas continu :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) d\lambda(x).$$

⇒ l'espérance s'obtient en calculant une *somme* ou une *intégrale*.

## Variance

### Définition

- Le moment centré d'ordre 2 de  $X$  est appelé la *variance de  $X$*  et est noté  $\mathbf{V}[X]$  :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive est appelée *l'écart-type* de  $X$ , noté  $\sigma[X]$ .

### Interprétation

- La variance est un réel *positif*.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par  $X$  et l'espérance (moyenne) de  $X$  ⇒ interprétation en terme de *dispersion*.

## Exemples

1. Loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  :  $\mathbf{V}[X] = p(1 - p)$  ;
2. Loi uniforme sur  $[0, 1]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/12$  ;
3. Loi uniforme sur  $[1/4, 3/4]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/48$ .

## Quelques propriétés

### Espérance

1.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b$  ;
2.  $\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$
3. *Jensen* : soit  $X$  à valeurs dans  $]a, b[$  et  $\varphi$  une fonction réelle convexe sur  $]a, b[$

$$\varphi(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[\varphi(X)].$$

### Variance

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{V}[\alpha X] = \alpha^2 \mathbf{V}[X]$  ;
2.  $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbf{V}[a + X] = \mathbf{V}[X]$  ;
3.  $\mathbf{V}[X] = 0$  *si et seulement si*  $X$  est une v.a.r. presque sûrement constante ( $X = \mathbf{E}[X]$  p.s.).

## Inégalités sur les moments

### Markov

Si  $X$  est une v.a.r. positive, on a pour tout réel  $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

### Bienaymé-Chebychev

Si  $\mathbf{E}[X^2] < +\infty$ , alors on a pour tout réel  $a > 0$

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathbf{V}[X]}{a^2}.$$

## 4.2 Vecteurs aléatoires

- On se restreindra à la notion de *couple aléatoire*.

### Définitions

- Un *couple* de v.a.r. est une application :

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

- La *loi* de  $(X, Y)$  est représentée par les probabilités

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \mathbf{P}(X \in [a, b] \text{ et } Y \in [c, d])$$

pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$ .

- Les v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont les *marginales* du couple  $(X, Y)$ .
- Les notions vues pour les v.a.r. se *généralisent* aux couples aléatoires.

### Exemple

- **Fonction de répartition** :

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

- **Densité** (si elle existe) : fonction  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx.$$

- **Densités marginales** (si elles existent) :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) \, dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) \, dx.$$

### Calcul d'espérance

- **Question** : étant donné un couple  $(X, Y)$  et une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que vaut  $\mathbf{E}[g(X, Y)]$  ?

#### Théorème de transfert

Si  $\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, y)| f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy < +\infty$  alors  $g(X, Y)$  est intégrable et

$$\mathbf{E}[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$

- On déduit la *linéarité de l'espérance* : soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  alors

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

### Covariance

#### Définitions

- *Covariance* entre  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y].$$

- *Matrice de variance covariance* : matrice  $2 \times 2$

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}[X] & \mathbf{cov}(X, Y) \\ \mathbf{cov}(Y, X) & \mathbf{V}[Y] \end{pmatrix}$$

#### Propriétés

- $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{cov}(Y, X)$  ;
- $\mathbf{cov}(aX + b, Y) = a\mathbf{cov}(X, Y)$  ;
- $\mathbf{V}[aX + bY] = a^2\mathbf{V}[X] + b^2\mathbf{V}[Y] + 2ab\mathbf{cov}(X, Y)$ .

## Indépendance

### Définition

Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire.  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* si pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b)\mathbf{P}(c \leq Y \leq d).$$

### En pratique

Si  $(X, Y)$  admet pour densité  $f_{X,Y}$  alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

### Propriété

Soient  $X$  et  $Y$  2 v.a.r *indépendantes*. Alors

1.  $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$  et donc  $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$
2.  $\mathbf{V}[X + Y] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$ .

— *Attention* : les réciproques sont fausses !

## 5 Bibliographie

### Références

#### Bibliol

[Jacod and Protter, 2003] Jacod, J. and Protter, P. (2003). *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini.

[Lejeune, 2004] Lejeune, M. (2004). *Statistique. La théorie et ses applications*. Springer.

[Rouvière, 2015] Rouvière, L. (2015). Probabilités générales. Polycopié de cours, <https://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere>.

# Deuxième partie

## Théorie de l'estimation

### Rappels

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$ .
- Ces observations sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n \implies \exists \omega_i$  tel que

$$X_i(\omega_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

### Hypothèse

- On va supposer que les variables  $X_i$  sont indépendantes et de même loi de probabilité (inconnue)  $\mathbf{P}$ .

### Le problème de l'estimation

Il consiste à trouver (*estimer*) la loi  $\mathbf{P}$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

## 1 Modèle - estimateur

- Poser un modèle revient à supposer que la loi de probabilité inconnue  $\mathbf{P}$  appartient à une famille de lois  $\mathcal{P}$ .

### Définition

On appelle **modèle statistique** tout triplet  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où

- $\mathcal{H}$  est l'espace des observations (l'ensemble dans lequel les observations prennent valeurs);
- $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\mathcal{H}$ ;
- $\mathcal{P}$  est une famille de probabilités définies sur  $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ .

### Remarque

- $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}$  ne sont généralement pas difficile à caractériser.
- Le statisticien ou le praticien doit par contre choisir une famille de loi de probabilité susceptible de contenir la loi inconnue  $\mathbf{P}$ .

### Exemple

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite  $n = 100$  patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

### Modélisation

- On note  $x_i = 1$  si le  $i^{\text{ème}}$  patient a guéri, 0 sinon.
- On suppose que  $x_i$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $X_i$  de loi de bernoulli de paramètre inconnu  $p \in [0, 1]$ .
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

### Spécification du triplet

#### Le triplet pour l'exemple

- $\mathcal{H}$  : pas le choix  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .
- $\mathcal{A}$  : pas le choix  $\mathcal{A} =$  ensemble des parties de  $\{0, 1\}$ .
- $\mathcal{P} = \{\text{lois de Bernoulli de paramètre } p \in [0, 1]\} = \{B(p) : p \in [0, 1]\}$ .
- A travers ce modèle, on suppose que la variable aléatoire  $X_i$  qui représente la réaction du  $i^{\text{e}}$  patient au traitement suit une loi de Bernoulli de paramètre inconnu  $p \in [0, 1]$ .
- Le problème statistique : reconstruire ou estimer ce paramètre à l'aide de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

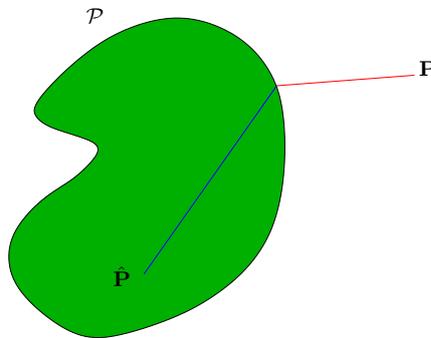
## Autres exemples

- *Exemple 1* : Traitement.
- *Exemple 2* : Nombre de voitures au feu rouge.
- *Exemple 3* : Durée de trajet domicile/travail.

	$\mathcal{H}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{P}$
Exemple 1	$\{0, 1\}$	$\mathcal{P}(\{0, 1\})$	$\{B(p), p \in [0, 1]\}$
Exemple 2	$\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\{\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0\}$
Exemple 3	$\mathbb{R}$	$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	$\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$

## 2 types d'erreur

- *Poser un modèle* = choisir une famille de lois  $\mathcal{P}$  candidates pour  $\mathbf{P}$ .



On distingue deux types d'erreurs :

- **Erreur d'estimation** : erreur commise par le choix d'une loi dans  $\mathcal{P}$  par rapport au meilleur choix.
- **Erreur d'approximation** : erreur commise par le choix de  $\mathcal{P}$ .
- Ces deux termes évoluent généralement en *sens inverse*.

### Exemple des durées de trajet

- $\mathcal{M}_1 : \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ .
- $\mathcal{M}_2 : \mathcal{P} = \{\text{Lois à densités continues}\}$ .
- $\mathcal{M}_2$  est **plus flexible** que  $\mathcal{M}_1$ . On a même  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ .
- La théorie montrera qu'il est *plus difficile de bien estimer* dans  $\mathcal{M}_2$  que dans  $\mathcal{M}_1$ .

### Conséquence

- Le travail du statisticien consistera **toujours** à essayer de trouver le **meilleur compromis** entre ces deux erreurs.
- Dans ce cours, nous étudierons essentiellement l'**erreur d'estimation** dans les *modèles paramétriques*.

## Paramétrique versus non paramétrique

### Définition

- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta \in \mathbb{R}^d$  alors on parle de **modèle paramétrique** et  $\Theta$  est l'espace des paramètres.
- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$  où  $\mathcal{F}$  est de dimension infinie, on parle de **modèle non paramétrique**.

### Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  est un modèle *paramétrique*.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$  est un modèle *non paramétrique*.

Le problème statistique sera d'*estimer*  $(\mu, \sigma^2)$  ou  $f$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

## Le problème de régression

- *Données* :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des *réalisations de variables aléatoires*  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  telles qu'il existe une fonction *inconnue*  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

## Le problème statistique

Il consiste à estimer la *fonction inconnue*  $m$  à l'aide de l'échantillon  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

## Régression paramétrique vs non paramétrique

### Modèle linéaire (paramétrique)

- On *suppose*  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'*estimer*  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de *dimension finie*  $\implies$  modèle *paramétrique*.

### Un modèle non paramétrique

- On suppose que  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.
- Le problème est d'estimer  $m$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de *dimension infinie*  $\implies$  modèle *non paramétrique*.

## Objectifs

### Estimer...

Etant donné un *modèle*  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  :

- Trouver des *procédures (automatiques)* permettant de sélectionner une loi  $\hat{\mathbf{P}}$  dans  $\mathcal{P}$  à partir d'un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .
- Etudier les *performances* des lois choisies.

## Paramétrique

- Dans la suite, on va considérer uniquement des *modèles paramétriques*  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  avec  $\Theta$  de dimension finie (typiquement  $\mathbb{R}^p$ ).
- Choisir une loi reviendra donc à *choisir un paramètre*  $\hat{\theta}$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .
- Les modèles que nous allons considérer auront pour *espace d'observations* un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

### Echantillon

Un *échantillon* de taille  $n$  est une suite  $X_1, \dots, X_n$  de  $n$  *variables aléatoires indépendantes et de même loi*  $\mathbf{P}_\theta$ , pour  $\theta \in \Theta$ .

## Identifiabilité

- Si  $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$  est injective, le modèle est dit *identifiable*.
- L'*identifiabilité* implique
  - 2 paramètres *différents* correspondent à deux lois *différentes*.
  - 2 lois *identiques* correspondent à deux paramètres *identiques*.
- Elle permet donc d'*identifier* une loi à un *unique* paramètre et est *capitale* pour savoir ce que l'on doit estimer.

## La démarche statistique

1. On récolte  $n$  *observations* ( $n$  valeurs)  $x_1, \dots, x_n$  qui sont les résultats de  $n$  expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation** : on suppose que les  $n$  valeurs sont des *réalisations de  $n$  variables aléatoires indépendantes*  $X_1, \dots, X_n$  et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$ . Ce qui nous amène à définir le modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta\}, \theta \in \Theta)$ .
3. **Estimation** : chercher dans le modèle une loi  $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$  qui soit *la plus proche possible* de  $\mathbf{P}_\theta \implies$  chercher un **estimateur**  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ .

## Estimateurs

### Définitions

- Une *statistique* est une application (mesurable) définie sur  $\mathcal{H}^n$ .
- Un *estimateur* (de  $\theta$ ) est une fonction (mesurable) de  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans un sur-ensemble de  $\Theta$ .

### Exemple 1 (modèle de Bernoulli)

Les variables aléatoires  $\hat{p}_1 = X_1$  et  $\hat{p}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  sont des estimateurs de  $p$ .

### Remarque

- Un estimateur  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  : c'est une *variable aléatoire*.
- *Démarche* :
  1. Chercher le "meilleur" *estimateur*  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
  2. A la fin, calculer *l'estimation*  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  (renvoyé par le logiciel).

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre *abstrait*.
- On cherche alors la *meilleure* fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de *critères* à définir.
- Une fois cette fonction trouvée, il faut donner une *réponse* (qui ne doit pas être abstraite!)... On applique la fonction trouvée aux données observées  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ .

### Abus de notation

*Malheureusement* on note souvent de la *même façon* l'estimateur et l'estimation :

- on écrit  $\hat{\theta}$  pour *l'estimateur*  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ;
- on écrit  $\hat{\theta}$  pour *l'estimation*  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  ;
- Il est donc nécessaire de faire soi-même la *distinction entre ces deux objets* lorsque on lit ou écrit  $\hat{\theta}$ .

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

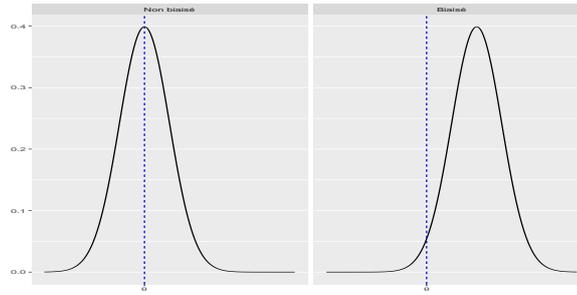
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

- *Modèle* : les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.  $X_i$  indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (inconnu).
- *Problème statistique* : estimer  $p$ .
- *Estimateur* :

$$\hat{p} = \hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- *Estimation* :

$$\hat{p} = \hat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{3}{8}.$$



## 2 Biais, variance, risque quadratique

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  *inconnu*.
- On cherche un *estimateur*  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Un estimateur est donc une *variable aléatoire*. Il va donc (le plus souvent) posséder
  - une loi de probabilité
  - une espérance
  - une variance...

### Espérance d'un estimateur

- On représente ci-dessous les lois de probabilité de 2 *estimateurs* de  $\theta$ .

#### Commentaires

- L'estimateur de gauche semble être *préférable* à celui de droite.
- Sa loi de probabilité est en effet *centrée sur le paramètre inconnu*  $\implies \mathbf{E}[\hat{\theta}] \approx \theta$ .

### Biais d'un estimateur

- Dans la suite, pour un modèle de famille de loi  $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ , on désigne par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{V}$  les variables sous la loi  $\mathbf{P}_\theta$ .

#### Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 1 (l'espérance existe).

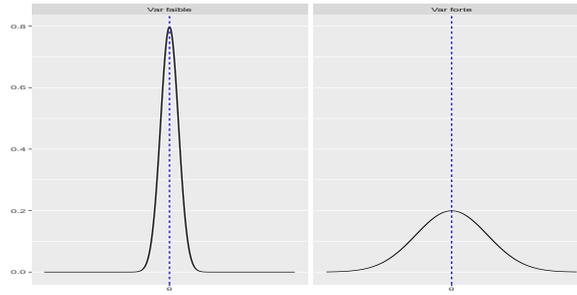
1. Le *biais* de  $\hat{\theta}$  en  $\theta$  est  $\mathbf{E}(\hat{\theta}) - \theta$ .
2.  $\hat{\theta}$  est *sans biais* lorsque son biais est nul.
3.  $\hat{\theta}$  est *asymptotiquement sans biais* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta$ .

#### Exemple 1

Les estimateurs  $\hat{p}_1$  et  $\hat{p}_2$  sont *sans biais*.

### Variance d'un estimateur

- Mesurer le biais n'est *pas suffisant*, il faut également mesurer la *dispersion* des estimateurs.
- Les deux estimateurs sont *sans biais*.
- L'estimateur de gauche semble être *préférable* à celui de droite.
- Sa variance est plus faible :  $\implies \mathbf{V}[\hat{\theta}_1] \leq \mathbf{V}[\hat{\theta}_2]$ .



## Risque quadratique

- *Objectif* : trouver des estimateurs ayant un **biais** et une **variance faibles**.
- Le **risque quadratique** prend en compte simultanément ces deux critères.

### Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 2.

1. Le **risque quadratique** de  $\hat{\theta}$  de  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$$

2. Soit  $\hat{\theta}'$  un autre estimateur d'ordre 2. On dit que  $\hat{\theta}$  est **préférable** à  $\hat{\theta}'$  si

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) \leq \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}') \quad \forall \theta \in \Theta.$$

### Exemple (Bernoulli)

$\hat{p}_2$  est **préférable** à  $\hat{p}_1$ .

## Estimateur VUMSB

### Propriété décomposition biais variance

Si  $\hat{\theta}$  est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = (\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 + \mathbf{E}(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2 = b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}[\hat{\theta}].$$

### Définition

Si  $\hat{\theta}$  est sans biais, on dit qu'il est de **variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB)** si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2 :

$$\hat{\theta} \text{ VUMSB} \iff \begin{cases} \mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta \\ \forall \tilde{\theta} \text{ tel que } \mathbf{E}[\tilde{\theta}] = \theta, \mathbf{V}[\tilde{\theta}] \leq \mathbf{V}[\hat{\theta}] \end{cases}$$

### Exemple

Dans le modèle de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  nous montrerons que  $\hat{p}_2$  est **VUMSB**.

## 3 Quelques méthodes d'estimation

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- Le **biais** et la **variance** permettent de mesurer la performance d'un estimateur  $\hat{\theta}$ .

### Question

Comment construire un estimateur (que l'on espère) **performant** ?

### Construction d'estimateurs

- Il existe des procédures **automatiques** qui permettent de construire des estimateurs.
- Nous présentons dans cette partie la méthode des **moments** et du **maximum de vraisemblance**.

Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\hat{p}_m = \bar{X}_n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = \bar{X}_n$
Uniforme $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	$\hat{\theta}_m = 2\bar{X}_n$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = 1/\bar{X}_n$

### 3.1 La méthode des moments

- C'est une approche *intuitive* qui repose sur le fait que pour de nombreux modèles les moments *empiriques* doivent être *proches* des moments *théoriques*.
- En effet, on a d'après la *LFGN* que pour de nombreux modèles :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \mathbf{E}[X_1].$$

#### Définition

L'*estimateur des moments*  $\hat{\theta}_m$ , si il existe, est la solution en  $\theta$  de l'équation

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbf{E}[X_1].$$

#### Remarque

- L'estimateur des moments *n'existe pas toujours*.
- Même lorsqu'il existe, il n'est *pas toujours performant* (voir TD).

### 3.2 La méthode du maximum de vraisemblance

#### Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ .
- $x_1, \dots, x_n$  réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

#### Idée

1. La quantité  $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  peut être vue comme une mesure de la *probabilité d'observer les données observées*.
2. Choisir le paramètre  $p$  qui *maximise* cette probabilité.

#### Notion de vraisemblance

- $L(x_1, \dots, x_n; p)$  est appelée *vraisemblance* (elle mesure la vraisemblance des réalisations  $x_1, \dots, x_n$  sous la loi  $\mathbf{P}_p$ ).
- L'approche consiste à choisir  $p$  qui "*rend ces réalisations les plus vraisemblables possible*".

Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\hat{p}_{MV} = \bar{X}_n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{X}_n$
Uniforme $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	$\hat{\theta}_{MV} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

## Vraisemblance

### Cas discret

La **vraisemblance** du paramètre  $\theta$  pour la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'application  $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$  définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

### Cas absolument continu

Soit  $f(\cdot, \theta)$  la densité associée à  $\mathbf{P}_\theta$ . La **vraisemblance** du paramètre  $\theta$  pour la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'application  $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$  définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

## L'estimateur du maximum de vraisemblance

### Définition

Un **estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)** est une statistique  $g$  qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$

$$L(x_1, \dots, x_n; g(x_1, \dots, x_n)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

L'EMV s'écrit alors  $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ .

### Exemples

## 4 Information de Fisher

—  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\mathbb{R}$ .

### Objectif

Montrer que sous certaines hypothèses de régularité l'EMV est **asymptotiquement VUMSB** :

1.  $\hat{\theta}$  est asymptotiquement **sans biais**.
2. il existe une fonction  $r(n, \theta)$  telle que pour tout estimateur  $T$  sans biais de  $\theta$ , on a  $\mathbf{V}(T) \geq r(n, \theta)$ .
3. la **variance asymptotique** de l'EMV vaut  $r(n, \theta)$ .

### Information de Fisher

- Considérons pour l'instant 1 seule observation  $X$  de loi  $\mathbf{P}_\theta$ .
- On désigne par  $L_1(\cdot; \theta)$  la vraisemblance associée.

### Définition

Si elle existe (c'est-à-dire si la dérivée par rapport à  $\theta$  de la log-vraisemblance est de carré intégrable), l'**information de Fisher** associée à l'observation  $X$  est définie par :

$$I : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\theta \mapsto \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$$

### Interprétation

L'**information de Fisher** peut s'interpréter comme :

- la **quantité d'information** apportée par l'observation  $X$  pour estimer le paramètre inconnu.
- une **mesure du pouvoir de discrimination** du modèle entre deux valeurs proches du paramètre  $\theta$  :
  - $I(\theta)$  grand : il sera "facile" d'identifier quel paramètre est le meilleur.
  - $I(\theta)$  petit : l'identification sera plus difficile.

### Propriété

- Si elle existe, l'information de Fisher vérifie

$$I(\theta) = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(L(X, \theta)) \right] = \mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right].$$

- On a de plus

$$I(\theta) \geq 0 \text{ et } I(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(x, \theta) = f(x).$$

### Exemple

- On considère le modèle de *Bernoulli* :  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .
- On a alors

$$L(x, p) = p^x (1-p)^{1-x}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log(L(x, p)) = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}.$$

- D'où

$$I(p) = -\mathbf{E} \left[ -\frac{X}{p^2} - \frac{1-X}{(1-p)^2} \right] = \frac{1}{p(1-p)}.$$

### Fisher pour $n$ observations

- On considère maintenant  $n$  observations  $X_1, \dots, X_n$  de loi  $\mathbf{P}_\theta$ .
- On désigne par  $L_1(\cdot; \theta)$  la *vraisemblance associée*.

### Définition

Si elle existe (c'est-à-dire si la dérivée par rapport à  $\theta$  de la log-vraisemblance est de carré intégrable), l'*information de Fisher associée à l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  est définie par* :

$$I_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \theta \mapsto \mathbf{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X_1, \dots, X_n, \theta)) \right)^2 \right]$$

### Propriété d'additivité

L'information de Fisher est *additive* :

$$I_n(\theta) = nI(\theta).$$

### Modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a

$$I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}.$$

## Cramér-Rao

### Proposition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$  de biais  $b(\theta) = \mathbf{E}_\theta[\hat{\theta}] - \theta$ . Alors sous certaines hypothèses de régularité (voir [Guyader, 2017]), on a

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq b(\theta)^2 + \frac{(1 + b'(\theta))^2}{I_n(\theta)}.$$

### Corollaire : Inégalité de Cramér-Rao

On déduit que si  $\hat{\theta}$  est un estimateur **sans biais** de  $\theta$  alors

$$\mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$

- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

### Exemple : modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a vu que  $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ . La **borne de Cramér-Rao** vaut donc  $\frac{p(1-p)}{n}$ .
- On considère l'estimateur  $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[\hat{p}] = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

- On conclut donc que  $\hat{p}$  est **VUMSB** ou **efficace**.

## 5 Annexe : La famille exponentielle

### La classe exponentielle

#### Définition

Soit un **famille de lois** admettant des densités (cas continu) ou des fonctions de masse (cas discret)  $\{f(x, \theta), \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ . On dit qu'elle appartient à la **famille ou classe exponentielle de lois** si  $f(x, \theta)$  peut s'écrire

$$f(x, \theta) = a(\theta)b(x) \exp(c(\theta)d(x))$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- La plupart des lois **standards** appartiennent à la **famille exponentielle**.

### Exemples

- Loi de **Bernoulli**  $\mathcal{B}(p)$  :

$$f(x, p) = p^x(1-p)^{1-x} = (1-p) \exp\left(x \log \frac{p}{1-p}\right).$$

- Loi de **Poisson**  $\mathcal{P}(\lambda)$  :

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \exp(-\lambda) \frac{1}{x!} \exp(x \log \lambda).$$

### Mais aussi

Lois exponentielle, normale, gamma...

- Il est possible de montrer que les lois de la **famille exponentielle** possèdent de **bonnes propriétés**.
- Notamment pour l'estimateur du **maximum de vraisemblance**.
- Ces propriétés seront étudiés au S2, on pourra aussi consulter [Lejeune, 2004].

## 6 Bibliographie

### Références

#### Biblio2

- [Cadre and Vial, 2012] Cadre, B. and Vial, C. (2012). *Statistique mathématique, cours et exercices corrigés*. Ellipses.
- [Guyader, 2017] Guyader, A. (2017). Statistique mathématique. Polycopié de cours, <http://www.lsta.upmc.fr/guyader/index.html>.
- [Lejeune, 2004] Lejeune, M. (2004). *Statistique. La théorie et ses applications*. Springer.

# Troisième partie

## Convergences stochastiques

### Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Le paramètre  $n$  représente souvent le **nombre de mesures** que l'on peut voir d'une certaine façon comme une **quantité d'information** à disposition pour **bien estimer**  $\theta$ .

### Conséquence

- Plus on a d'information, plus on doit être **précis**.
- Plus  $n$  est grand, plus  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  doit être **proche** de  $\theta$ .
- On a donc envie de traduire cela par  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta$ .

### Problème

Que signifie cette **notion de limite** ?

### Retour vers les probabilités

- **Cadre** :  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.
- On cherche à définir la **notion de limite** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

### Première idée

- Une variable aléatoire réelle est une **fonction** qui va de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Utiliser les **modes de convergence** réservés aux fonctions.

### Exemple

On pourrait dire que  $(X_n)_n$  **converge simplement vers**  $X$  si pour tout  $\omega \in \Omega$  la **suite réelle**  $(X_n(\omega))_n$  converge vers  $X(\omega)$  :

$$\forall \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près **inutile en probabilités**.

### Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce **équilibrée**.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.  $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ .
- Lorsque  $n$  est **grand**, la proportion de faces après  $n$  lancers "doit" tendre vers 1/2. On a donc envie d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}.$$

- Ceci est pourtant **faux**, si on utilise la définition précédente : il suffit de considérer l'évènement  $\omega_0 = \{f, f, f, f, f, \dots\}$  (obtenir que des faces)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega_0) + \dots + X_n(\omega_0)}{n} = 1.$$

- Il est donc **nécessaire de définir des modes de convergence spécifiques aux v.a.**

# 1 Les différents modes de convergence

## 1.1 Convergence presque sûre ou convergence forte

### Exemple du pile ou face (retour)

- Il est facile de voir que l'évènement  $\omega_0$  est assez **invraisemblable** lorsque  $n$  est grand. En effet  $\mathbf{P}(\{\omega_0\}) = 1/2^n$ .
- On peut même montrer qu'il en est de même pour **tous les évènements où on n'a pas convergence**, on a donc

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1.$$

- **Conclusion** : l'ensemble des évènements où la convergence ne se produit pas est de **probabilité nulle**. On parle de convergence **presque sûre**.

### Définition

On dit que  $(X_n)_n$  converge **presque sûrement** vers une variable aléatoire  $X$  si l'ensemble  $N$  des  $\omega$  tels que la suite numérique  $(X_n(\omega))_n$  ne converge pas vers  $X(\omega)$  est négligeable (c'est-à-dire vérifie  $\mathbf{P}(N) = 0$ ). On note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad p.s. \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{p.s.} X.$$

### Remarque

On peut aussi dire que  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  si et seulement si

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) = 0$$

ou encore

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

### Proposition : opérations sur la cv ps

1. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction **continue** sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi(X)$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$  alors
  - pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{p.s.} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY$ .
  - $X_n/Y_n \xrightarrow{p.s.} X/Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

### Conclusion

Les opérations classiques sur les limites sont **conservées** par la convergence presque sûre.

### Comment montrer une convergence ps

- On utilise **rarement la définition** pour montrer la convergence presque sûre. On a souvent recourt à l'un des **critères** suivants.

### Théorème

La suite de v.a.r.  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$  **si et seulement si** pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{m \geq n} |X_m - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

### Lemme de Borel-Cantelli

Si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$$

alors  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ .

### Exemple

—  $(X_n)_n$  suite de v.a.r. i.i.d telle que  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ .

— *Question* : est-ce que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0 ?$$

— On a d'après *B.T.*

$$\mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n^3 \varepsilon^2}.$$

— On a donc

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0.$$

## 1.2 La convergence en probabilité

### Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge en probabilité* vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

### Exemple

— Soit  $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$  des v.a.r. indépendantes telles que  $\mathbf{E}[X_n] = 0$  et  $\mathbf{V}(X_n) = \sigma^2$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

— D'après *Bienaymé-Tchebychev*, on a

$$\mathbf{P}(|\bar{X}_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \mathbf{V} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}.$$

— On a donc  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ .

### Exemple

— Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont la *loi est définie par*

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

— On a pour  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}) + \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = 0) \\ &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}). \end{aligned}$$

— Or, pour  $n$  assez grand,  $\{|X_n| > \varepsilon\} = \{X_n = \sqrt{n}\}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0.$$

— On déduit  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ .

— Les opérations sur les limites présentées pour la convergence presque sûre sont également *vraies pour la convergence en probabilité*.

### Proposition : opérations sur la cv en proba

1. Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction continue** sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(X)$ .

2. Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$  alors
- pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$ .
  - $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X/Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

- *Attention* : la réciproque est **fausse** ! Une contre exemple est donné dans [Jacod and Protter, 2003], page 152.

## 1.3 La convergence en moyenne d'ordre $p$

### Définition

Soit  $p > 0$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge en moyenne d'ordre  $p$*  (ou *dans  $L_p$* ) vers  $X$  si les  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L_p$  ( $\mathbf{E}[|X_n|^p] < +\infty$  et  $\mathbf{E}[|X|^p] < +\infty$ ), et si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{L_p} X$ .

- Les cas les plus importants sont  $p = 1$  (convergence en *moyenne*) et  $p = 2$  (convergence en *moyenne quadratique*).
- *Convergence en moyenne (dans  $L_1$ )* : si  $X_n \xrightarrow{L_1} X$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n|] = \mathbf{E}[|X|].$$

### Convergence dans $L_2$

- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbf{E}[X_n] - a)^2 + \mathbf{V}[X_n].$$

- On déduit

$$X_n \xrightarrow{L_2} a \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}[X_n] = 0 \end{cases}$$

### Application en statistique

Si  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L_2} \theta$  alors

- le **biais** de  $\hat{\theta}_n$  tend vers 0.
- la **variance** tend vers 0.
- On a d'après l'*inégalité de Jensen*

$$\mathbf{E}|X_n - X| = \mathbf{E}\sqrt{(X_n - X)^2} \leq \sqrt{\mathbf{E}|X_n - X|^2}.$$

- On déduit la propriété suivante.

### Propriété

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \implies X_n \xrightarrow{L_1} X.$$

### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{L_p} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

- *Attention* : la réciproque est **fausse** !
- On peut comme *contre-exemple* utiliser pour  $p = 2$  la suite de v.a.r. de loi

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

## 1.4 La convergence en loi

- Bien que différent, les trois modes de convergence vus précédemment sont de même nature et peuvent être abordés comme des *variantes de la convergence habituelle*.
- *Il existe un autre mode de convergence, différent des précédents mais très utile en probabilité : la convergence en loi, ou convergence faible ou encore convergence étroite.*
- *Dans cette partie, nous donnons la définition ainsi que les principales propriétés de ce nouveau mode de convergence. Pour plus de détails, ainsi que pour les preuves des résultats, on pourra consulter [Jacod and Protter, 2003].*

### L'idée

- La loi de  $X_n$  se rapproche de la loi de  $X$  lorsque  $n$  est grand.
- Définir la convergence en loi par quelque chose du genre

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \begin{cases} \text{pour } n \text{ grand } \mathcal{L}(X_n) \approx \mathcal{L}(X) \\ \text{ou} \\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A) \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \end{cases} \quad (1)$$

### Mais...

Cette définition n'est cependant *pas totalement satisfaisante*.

### (Contre) exemple

- $(X_n)_n$  de loi uniforme sur  $] -1/n; 1/n[$  et  $X = 0$  p.s.

### Cv p.s., proba, $L_p$

- On a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= 1 - \mathbf{P}(-\varepsilon < X_n < \varepsilon) \\ &= 1 - \frac{n}{2} \left[ \min\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) - \max\left(-\frac{1}{n}, -\varepsilon\right) \right] \\ &= 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

- *Conclusion* :  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  (mais aussi p.s. et dans  $L_p$ ).

### Remarque

- Cependant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_n \leq 0) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbf{P}(X \leq 0) \\ \mathbf{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbf{P}(X > 0) \end{cases}$$

- *Conséquence* :  $(X_n)_n$  ne converge pas en loi vers  $X$  au sens de la définition (1).

### Remarque

- Pour tout intervalle  $[a, b]$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in [a, b]) = \mathbf{P}(X \in [a, b]).$$

- On a également pour  $x \neq 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ .
- *Les problèmes de la définition (1) se situent lorsque  $x = 0$ , c'est-à-dire en l'unique point de discontinuité de la fonction de répartition de  $F_X$ .*

## Convergence en loi

### Définition

On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge en loi vers  $X$  si, en tout point de continuité de  $F_X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$* . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

### Exemple

— Sur l'exemple précédent on a

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1/n \\ n/2(x + 1/n) & \text{si } -1/n < x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } x > 1/n. \end{cases}$$

— Ainsi,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

— Comme  $F_X$  est *discontinue en 0*, on conclut que  $X_n \not\xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

## Attention

### Remarque

— Les opérations conservées par les cv en probabilités et presque sûre ne le sont *pas* forcément par la *convergence en loi*!

— Par exemple,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  *n'implique pas*

—  $\mathbf{P}(X_n \in A) \rightarrow \mathbf{P}(X \in A)$ ,  $\forall A$  (déjà vu) ;

—  $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \mathbf{E}[X]$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{L}(X_n) = \frac{1}{n}\delta_{\{n\}} + (1 - 1/n)\delta_{\{0\}}$  ;

—  $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{L}(X) = N(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .

## Fonctions caractéristiques

— Très souvent utilisées pour montrer des convergences en loi.

### Définition

On appelle *fonction caractéristique* de  $X$  la fonction  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie comme la transformée de Fourier de sa loi de probabilité

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}].$$

### Calcul en pratique

— Si  $X$  est *discrète* de support  $\mathcal{S}$  et de fonction de masse  $\pi_X$  alors

$$\varphi_X(t) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_X(x) e^{itx}.$$

— Si  $X$  est *absolument continue* de densité  $f_X$  alors

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx.$$

Loi	Fonction caractéristique
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$pe^{it} + (1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$(pe^{it} + (1-p))^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$pe^{it}/(1-(1-p)e^{it})$
Uniforme $\mathcal{U}([-a, a])$	$\sin(at)/(at)$
Exponentielle $\xi(\lambda)$	$\lambda/(\lambda-it)$
Gaussienne $(m, \sigma^2)$	$e^{im}e^{-\sigma^2 t^2/2}$

## Exemple

### Proposition

1.  $\varphi_X$  est définie et continue pour tout nombre réel  $t$  ;
2.  $\varphi_X$  est bornée et  $\forall t |\varphi_X(t)| \leq 1$  ;
3.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$  ;
4. Si la loi de  $X$  est **symétrique** alors  $\varphi_X$  est une fonction **réelle paire** ;
5.  $\varphi_X$  **caractérise** la loi de  $X$ .

### Proposition

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. **indépendantes** alors on a pour tout  $t$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

— **Exercice** : calculer la fonction caractéristique de la loi Binomiale  $B(n, p)$  en utilisant la propriété précédente.

## Fonction caractéristique et moments

— En plus de caractériser la loi, la fonction caractéristique permet de **calculer les moments** d'une v.a.r. (lorsqu'ils existent).

### Théorème

Si il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathbf{E}[|X|^n] < \infty$ , alors

1.  $\varphi_X$  est continument dérivable jusqu'à l'ordre  $n$  inclu ;
2.  $\forall k = 0, 1, \dots, n, \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbf{E}[X^k]$ .
3. On a le développement

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbf{E}[X^k] + o(|t|^n)$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ .

## Retour à la convergence en loi

— La fonction caractéristique est très souvent utilisée pour **montrer des convergences en loi** grâce au théorème suivant.

### Théorème

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  ;
2. Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$ .
3. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ .

— La dernière assertion est une conséquence directe du **théorème de Paul Levy** (voir [Jacod and Protter, 2003]).

## Exemples

### Binomiale vers Poisson

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  telle  $np_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On a lorsque  $n \rightarrow \infty$  (faire un DL)

$$\varphi_{X_n}(t) = [p_n e^{it} + (1 - p_n)]^n \sim [1 + (e^{it} - 1)p_n]^n \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

2. On déduit  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  avec  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ .

### Poisson vers normale

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de loi de *Poisson* de paramètre  $\lambda_n$  avec  $\lambda_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- De la même manière que dans l'exemple précédent on montre que

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Convergence en loi et densités

- Dans les cas discret et absolument continue, la convergence en loi peut également se montrer à partir des *fonctions de masse et de densité*.

### Théorème

1. Soit  $X_n$  et  $X$  des v.a.r. à valeurs dans un espace  $E$  *fini ou dénombrable*. Alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  si et seulement si

$$\forall j \in E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X = j).$$

2. Soit  $X_n$  et  $X$  des v.a.r. dont les lois admettent pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $f_n$  et  $f$ . Si pour (presque) tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- La convergence en loi est préservée par *certaines opérations arithmétiques*.

### Théorème (Slutsky)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de v.a.r.,  $X$  une v.a.r. et  $a$  un *réel*. On a :

1. Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$  alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a, \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX \quad \text{et} \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{a} \quad (\text{si } a \neq 0).$$

2. Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est *continue* en tout point de  $\mathbb{R}$  alors  $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$ .

- **Attention** : les résultats ne sont plus vraies si  $Y_n$  converge vers une *variable aléatoire*  $Y$ .

## Relation entre les convergences

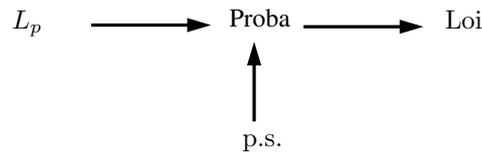
### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- *Réciproque fausse* : il suffit de prendre  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .
- La réciproque devient vraie lorsque  $X_n$  converge en loi vers une *variable constante*  $a$ . On a

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \iff X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a.$$

- On peut résumer les *relations entre les différents modes de convergence* par le diagramme suivant :



## 2 Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

### Présentation

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. admettant une espérance  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ .
- Intuitivement, lorsque  $n$  *augmente* la *moyenne empirique*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

doit se "*rapprocher*" de  $\mu$ .

- Les *lois des grands nombres* et le *théorème central limite* permettent de *préciser rigoureusement ce rapprochement*.

### 2.1 Lois des grands nombres

#### Un exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre  $p$ .
- *Question* : est-ce que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $p$  ?
- On a d'après *Bienaymé-Chebychev*  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- *Réponse* :  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ .

#### Lois faibles et fortes

- Les lois des grands nombres permettent de généraliser ce type de résultats à d'autres lois que la loi de Bernoulli.
- On parle de lois *faibles* des grands nombres pour des convergences en probabilité. Pour des convergences presque sûre, on parlera de lois *fortes* des grands nombres.

### 2 lois faibles des grands nombres

#### Loi faible dans $L_1$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. *2 à 2 indépendantes*, de même loi et qui admettent une *espérance*. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_1} \mu.$$

#### Loi faible dans $L_2$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. *2 à 2 non corrélées*, de même loi et qui admettent une *variance*. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_2} \mu.$$

- On pourra consulter [Foata and Fuchs, 2003], chapitre 17, pour la preuve de ces résultats.

## Loi forte des grands nombres

- Elle s'obtient en supposant l'*indépendance mutuelle*.

### Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. *indépendantes*, de *même loi* et qui admettent une *espérance*. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

### Application

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  (*inconnu*).
- *LFGN*  $\implies \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 1/\lambda$ .
- *Opérations sur les convergences p.s.* :  $1/\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \lambda$ .

## Méthode de Monte-Carlo

- Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On cherche à *approcher*  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .
- Pour  $X$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \mathbf{E}[f(X)].$$

- *LFGN* : Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r i.i.d de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Alors  $(f(X_n))_n$  une suite de v.a.r i.i.d et on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}[f(X)] = I.$$

### Algorithme de Monte-Carlo

1. Générer  $n$  (grand) observations suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$  ;
2. Approcher  $I$  par  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ .

## 2.2 Le théorème central limite

### Présentation

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On rappelle que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- *Interprétation* :  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

### Approche TCL

- Le théorème central limite stipule que, sous des *hypothèses très faibles*, on peut étendre ce résultat (pour  $n$  grand) à "*n'importe quelle*" suite de variables aléatoires indépendantes.
- C'est l'un des résultats les plus *impressionnants et les plus utilisés* en probabilités et statistique.

## Le TCL

### Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que  $\mathbf{E}[X_i^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont *faibles* : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- *Conséquence* : si  $n$  est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de  $\bar{X}_n$  par la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .
- On pourra écrire  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  mais *pas*

$$\mathcal{L}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

## Eléments de preuve

- Bien que ce résultat soit impressionnant, on peut voir la preuve comme un "simple" exercice sur les *fonctions caractéristiques* (voir [Jacod and Protter, 2003] pour des compléments).
- On note  $\varphi$  la fonction caractéristique des variables aléatoires  $X_i - \mu$  et

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}.$$

- On obtient des propriétés de la fonction caractéristique

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left( \varphi \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

- De plus

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\sigma^2.$$

- On déduit

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2)$$

et

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp(n \log(1 - t^2/2n + o(1/n))).$$

- Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp(-t^2/2)$$

et  $t \mapsto \exp(-t^2/2)$  est la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- D'après le théorème de Paul Levy, on conclut  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ .

## Exemple : loi de Bernoulli

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .
- On a d'après la *loi forte des grands nombres*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} p \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et d'après le *théorème central limite*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## Illustration

### Slutsky

- Par *continuité*, on a

$$\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \sqrt{p(1-p)},$$

et donc

$$\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1.$$

- On obtient donc d'après *Slutsky*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

### Remarque importante

Ce type de raisonnement est très souvent utilisé pour trouver des *intervalles de confiance asymptotique*.

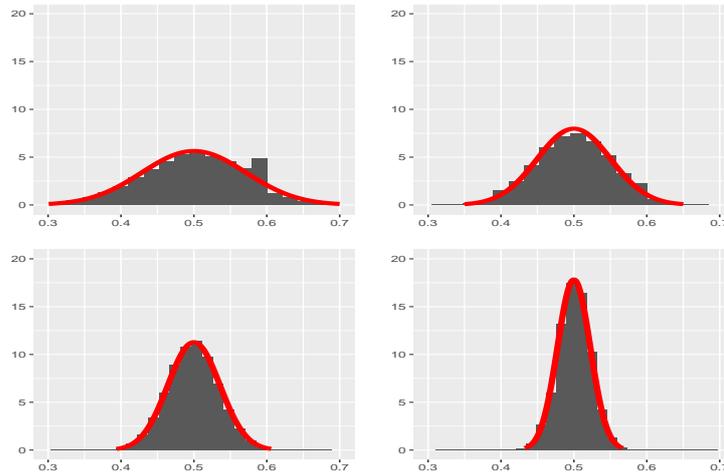


FIGURE 1 – Approximation TCL pour le modèle de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$  avec  $n = 50, 100, 200, 500$ .

### Exemple : loi exponentielle

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .
- On a d'après la *loi forte des grands nombres*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow{p.s.} \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et d'après le *théorème central limite*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{1/\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

### Problème

- Comment obtenir un TCL pour  $1/\bar{X}_n$  ?
- La *delta méthode* permet d'y parvenir.

### Delta méthode

- Elle permet (notamment) d'*étendre le TCL* à des estimateurs  $g(\bar{X}_n)$  qui s'écrivent comme une *fonction de la moyenne empirique*.

#### *Théorème (Delta méthode)*

Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r. et  $(v_n)$  une suite de réels qui tend vers  $+\infty$ . On suppose qu'il existe un réel  $a$  et une variable  $X$  tels que

$$v_n(X_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Si  $g$  est une *fonction dérivable au point  $a$* , alors

$$v_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(a)X.$$

En particulier, si  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et  $g'(a) \neq 0$ , alors

$$v_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, (\sigma g'(a))^2).$$

### Application : loi exponentielle

— Pour le modèle exponentiel, on a montré grâce au *TCL*

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

— On applique la *delta méthode* avec  $g(u) = 1/u$  :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

— Donc, en note  $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$ , d'après *Slutsky*,

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\lambda}}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## 3 Bibliographie

### Références

#### Biblio3

[Foata and Fuchs, 2003] Foata, D. and Fuchs, A. (2003). *Calcul des probabilités*. Dunod, 2<sup>e</sup> édition.

[Jacod and Protter, 2003] Jacod, J. and Protter, P. (2003). *L'essentiel en théorie des probabilités*. Cassini.

[Rouvière, 2015] Rouvière, L. (2015). Probabilités générales. Polycopié de cours, <https://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere>.

## Quatrième partie

# Critères de performance asymptotiques, intervalles de confiance et estimation multivariée

### Rappel

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  *univarié*.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un *estimateur* de  $\theta$ .
- *Critère de performance* pour  $\hat{\theta}_n$  : biais, variance, risque quadratique, VUMSB...

### Dans cette partie

- Critères de performance *asymptotiques* ;
- Estimation par *intervalles* ;
- Estimation *multivariée* ( $\theta \in \mathbb{R}^p$ ).

## 1 Critères asymptotiques

### Pourquoi ?

#### Postulat

On veut définir des estimateurs qui soient de *plus en plus précis* lorsque la *quantité d'information augmente*.

- La *quantité d'information* à disposition du statisticien peut être représentée par le *nombre d'observations*  $n$ .
- On cherche donc des estimateurs *de plus en plus précis* lorsque  $n$  augmente.
- *Mathématiquement*, on va donc *chercher des estimateurs*  $\hat{\theta}_n$  qui *convergent* (en probabilité, presque sûrement, en loi...) vers  $\theta$ .

### Consistance

#### Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est *consistant* (ou *convergent*) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0.$$

#### Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta}_n$  est *asymptotiquement normal*, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\theta)$$

où  $\sigma_\theta$  est positif.

### Outils consistance

- Bienaymé-Tchebychev.
- Loi forte des grands nombres.
- Opérations sur les convergences en probabilité.

### Exemple

- *Modèle de Bernoulli* :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$  est *consistant*.
- *Modèle exponentiel* :  $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$  est *consistant*.

## Outils normalité asymptotique

- Théorème central limite.
- Delta méthode.

### Exemple

- *Modèle de Bernoulli* :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$  est asymptotiquement normal à la vitesse  $\sqrt{n}$  :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

- *Modèle exponentiel* :  $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$  est asymptotiquement normal à la vitesse  $\sqrt{n}$  :

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2).$$

## 2 Estimation par intervalles

### Motivations

- Donner une *seule valeur* pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- *Exemple* : on traite 100 patients à l'aide d'un traitement. 72 guérissent. Affirmer que la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a *testé que sur 100 athlètes*) est un peu fort.
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, la performance se trouve dans *l'intervalle* [70%, 74%] avec une *confiance* de 90%.

### Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.

#### Définition

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On appelle **intervalle de confiance** pour  $\theta$  tout intervalle de la forme  $[A_n, B_n]$ , où  $A_n$  et  $B_n$  sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$ , on dit que  $[A_n, B_n]$  est un *intervalle de confiance asymptotique* pour  $\theta$  au niveau  $1 - \alpha$ .

#### Remarque importante

- $A_n = A_n(X_1, \dots, X_n)$  et  $B_n = B_n(X_1, \dots, X_n)$  sont **aléatoires** !
- Les logiciels renverront les **réels**  $a_n = A_n(x_1, \dots, x_n)$  et  $b_n = B_n(x_1, \dots, x_n)$ .

### Construction d'un IC

- Inégalité de *Bienaymé-Tchebychev* (intervalle de confiance par excès) :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) \geq 1 - \alpha.$$

- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre  $\theta$**  : fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de  $\theta$ .

#### Méthode

1. se donner un niveau  $1 - \alpha$ .
2. trouver un **estimateur**  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  dont **on connaît la loi** afin de construire une fonction pivotable.

## Construction d'IC

- Un *intervalle de confiance* pour un paramètre inconnu  $\theta$  se construit généralement à partir d'un *estimateur de  $\theta$  dont on connaît la loi*.
- A partir de la loi de  $\hat{\theta}$ , on cherche deux bornes  $A_n$  et  $B_n$  telles que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

## Remarque

A priori, plus  $\alpha$  est *petit*, plus l'intervalle aura un *grande amplitude*.

## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

## Construction de l'IC

- *Estimateur* :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .
- *Loi de l'estimateur* :  $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$ .
- On déduit

$$\mathbf{P}\left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- Un *intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$*  est donc donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

## Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$  désigne le *quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$*  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

## Définition

Plus généralement, le *quantile d'ordre  $\alpha$*  d'une variable aléatoire  $X$  est défini par le *réel  $q_\alpha$*  vérifiant

$$q_\alpha = \inf_x \{x : F(x) \geq \alpha\}.$$

- Les quantiles sont généralement renvoyés par les *logiciels statistique* :

```
> c(qnorm(0.975), qnorm(0.95), qnorm(0.5))
[1] 1.959964 1.644854 0
```

## Exemple

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

- *Estimation de  $\mu$*  :

```
> mean(X)
[1] 4.55
```

- *Intervalle de confiance de niveau 95%* :

```
> binf <- mean(X)-qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.269766 4.824128
```

## Intervalle de confiance pour une proportion

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- On cherche un *intervalle de confiance asymptotique* pour  $p$ .

### Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ .
- **Loi asymptotique de l'estimateur** :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

- On déduit

$$\mathbf{P} \left( \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \mu \leq \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \rightarrow 1 - \alpha.$$

### Première version de l'IC

- Un *intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$*  est donc donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- **Problème** : l'IC dépend de  $p$  qui est inconnu !
- **Solution** : Slutsky  $\implies$

$$\sqrt{n} \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

### Conclusion

Un *intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$*  est donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} \right].$$

- $n = 500$  observations issues d'une loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- *Estimation* de  $p$  :

```
> phat <- mean(X)
> phat
[1] 0.756
```

- *Intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%* :

```
> binf <- phat-qnorm(0.975)*sqrt(phat*(1-phat)/n)
> bsup <- phat+qnorm(0.975)*sqrt(phat*(1-phat)/n)
> c(binf,bsup)
[1] 0.718354 0.793646
```

### Fonction prop.test

On peut récupérer un IC plus précis à l'aide de la fonction `prop.test` :

```
> prop.test(sum(X),n,correct=FALSE)$conf.int
[1] 0.7164952 0.7916011
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

### Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On a vu qu'un IC pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

### Problème

- Dans la vraie vie,  $\sigma$  est **inconnu**!
- L'intervalle de confiance **n'est donc pas calculable**.

### Idée

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2)$$

### Problème

- On a bien

$$\mathcal{L} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) = \mathcal{N}(0, 1)$$

- mais

$$\mathcal{L} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\widehat{\sigma}} \right) \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

- Pour avoir la loi de

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\widehat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- il faut définir d'autres *lois de probabilité*.

### La loi normale (Rappel)

#### Définition

- Une v.a.r  $X$  suit une loi *normale* de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$  admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

#### Propriétés

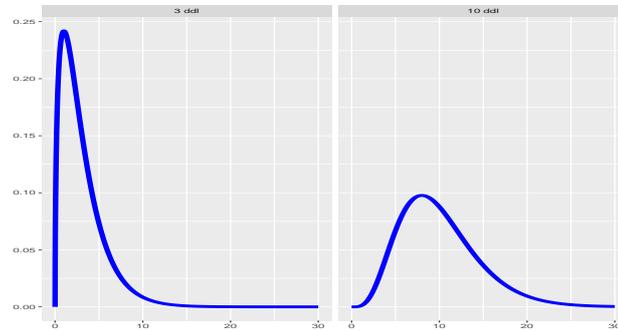
- $\mathbf{E}[X] = \mu$  et  $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$ .
- Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  alors

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

## Loi du $\chi^2$

### Définition

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La variable  $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$  suit une loi du *Chi-Deux à  $n$  degrés de liberté*. Elle est notée  $\chi^2(n)$ .
- $\mathbf{E}[Y] = n$  et  $\mathbf{V}[Y] = 2n$ .



## Loi de Student

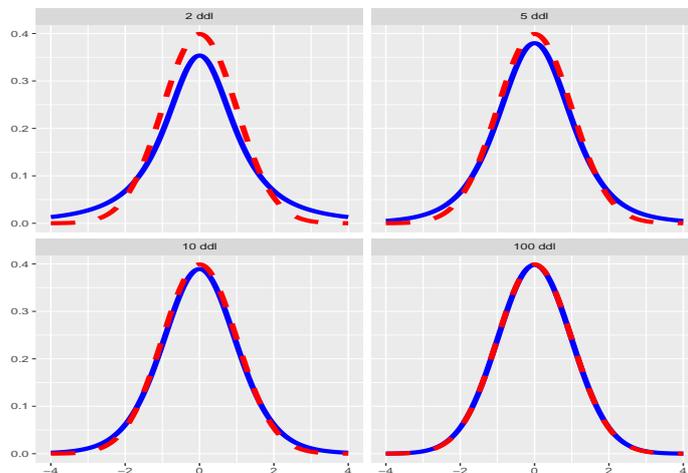
### Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. *indépendantes* de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une *loi de student à  $n$  degrés de liberté*. On note  $\mathcal{T}(n)$ .

- $\mathbf{E}[T] = 0$  et  $\mathbf{V}[T] = n/(n-2)$ .
- Lorsque  $n$  est grand la loi de student à  $n$  degrés de liberté peut être *approchée par la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$* .



### Légende

Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  (rouge).

## Loi de Fisher

### Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. *indépendantes* de lois  $\chi^2(m)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une *loi de Fisher à  $m$  et  $n$  degrés de liberté*. On note  $\mathcal{F}(m, n)$ .

- Si  $F \sim \mathcal{F}(m, n)$  alors  $1/F \sim \mathcal{F}(n, m)$ .

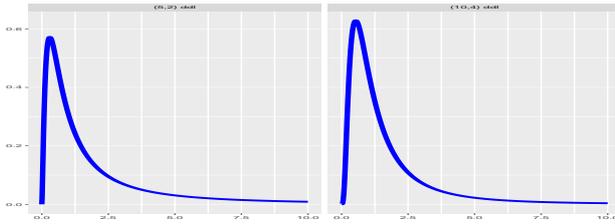


FIGURE 2 – Densités  $\mathcal{F}(5, 2)$  et  $\mathcal{F}(10, 4)$

### Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

### Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
2.  $\bar{X}_n$  et  $S^2$  sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

### Remarque

Les résultats 1 et 3 sont très importants pour construire des *IC*.

### IC pour la loi gaussienne

#### IC pour $\mu$

On déduit du résultat précédent qu'un *IC de niveau  $1 - \alpha$*  pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $n - 1$  ddl.

#### IC pour $\sigma^2$

Un *IC de niveau  $1 - \alpha$*  pour  $\sigma^2$  est donné par

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

où  $\chi_{1-\alpha/2}$  et  $\chi_{\alpha/2}$  sont les quantiles d'ordre  $1 - \alpha/2$  et  $\alpha/2$  de loi  $\chi^2(n-1)$ .

### Exemple : modèle Gaussien - IC pour $\mu$

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

- *Estimation* de  $\mu$  :

```
> mean(X)
[1] 4.55
```

- *Estimation* de  $\sigma^2$  :

```
> S <- var(X)
> S
[1] 0.783302
```

— *Intervalle de confiance de niveau 95%* :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.295420 4.798474
```

— *On peut obtenir directement l'intervalle de confiance à l'aide de la fonction t.test*

```
> t.test(X)$conf.int
[1] 4.295420 4.798474
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

### Exemple : modèle gaussien - IC pour $\sigma^2$

— On obtient l'IC pour  $\sigma^2$  à l'aide de la formule

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

— *On peut donc le calculer sur R :*

```
> binf <- 49*S/qchisq(0.975,49)
> bsup <- 49*S/qchisq(0.025,49)
> c(binf,bsup)
[1] 0.5465748 1.2163492
```

## 3 Estimation multivariée

### Jusqu'à présent

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- La loi  $\mathbf{P}_\theta$  dépend donc d'un *seul paramètre (à estimer)*.
- *Dans de nombreux problèmes concrets, les choses sont plus complexes.*
- *Il faut donc envisager le cas où on dispose de plus d'un paramètre.*

### Cadre

- Pour simplifier on se place dans le cas d'un *paramètre bivarié*.
- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  *inconnu dans  $\mathbb{R}^2$* .

### Estimateur

Un estimateur  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est une fonction mesurable de  $X_1, \dots, X_n$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, S^2)$  tels que

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

### 3.1 Biais, variance, risque quadratique

— Pour le *biais*, on travaille composante par composante :

$$\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \begin{pmatrix} \mathbf{E}[\hat{\theta}_1] \\ \mathbf{E}[\hat{\theta}_2] \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(\hat{\theta}) = \mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta = \begin{pmatrix} b(\hat{\theta}_1) \\ b(\hat{\theta}_2) \end{pmatrix}.$$

—  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est un *vecteur* aléatoire ! Il ne va donc pas posséder de variance mais une *matrice de variance covariance* :

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}[\hat{\theta}_1] & \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \\ \text{cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) & \mathbf{V}[\hat{\theta}_2] \end{pmatrix}.$$

#### Exemple : le modèle gaussien

—  $\theta = (\mu, \sigma^2)$  et  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$ .

— On a  $b(\hat{\theta}) = (0, 0)$ .

— D'après *Cochran*, on déduit

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}.$$

#### Risque quadratique

— Il existe également un *risque quadratique* en *estimation multivariée*.

#### Définition

On appelle *risque quadratique* de  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  le réel positif

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \theta\|^2$$

#### Propriété

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbf{E}_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta\|^2 + \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \mathbf{E}_{\theta} \hat{\theta}\|^2.$$

— On a toujours une *décomposition "biais/variance"*.

### 3.2 Critères asymptotiques

#### Consistance

#### Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est *consistant* (ou *convergent*) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(\|\hat{\theta} - \theta\| \geq \varepsilon) = 0.$$

— La valeur absolue est juste remplacée par la *norme euclidienne*.

— En pratique, ce n'est pas difficile : en effet  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$  si et seulement si  $\hat{\theta}_1 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_1$  et  $\hat{\theta}_2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_2$ .

#### Exemple : le modèle gaussien

$\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$  est consistant.

#### Normalité asymptotique

#### Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est *asymptotiquement normal*, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{\theta})$$

où  $\Sigma_{\theta}$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  définie positive.

— La loi limite est une loi gaussienne *multivariée*.

— Il existe une version *multivariée* du *TCL* et de la *delta méthode*. Ce sont les principaux outils pour montrer la normalité asymptotique d'estimateurs multivariés.

## Vecteurs gaussiens (rappels)

### Définition

- $X = (X_1, X_2)$  est un *vecteur aléatoire gaussien* si toute combinaison linéaire de ses marginales  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$  est une variable aléatoire réelle gaussienne.
- On note  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  où  $\mu \in \mathbb{R}^2$  est l'espérance de  $X$  et  $\Sigma$  est la matrice  $(2 \times 2)$  de variance covariance de  $X$ .

### Propriété

Soit  $X$  un vecteur gaussien de loi  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ . Alors  $X$  admet une densité si et seulement si  $\det(\Sigma) \neq 0$ . Elle est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right).$$

## TCL et delta méthode multivariés

### TCL

Soit  $(X_n)_n$  une suite de *vecteurs aléatoires i.i.d.* d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}^2$  et de matrice de variance covariance  $(2 \times 2)$   $\Sigma$ , alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

### Delta méthode

Si  $v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$  et si  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  admet des dérivées partielles au point  $\theta$ , alors

$$v_n(h(\hat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Dh_\theta X$$

où  $Dh_\theta$  est la matrice  $m \times d$  de terme  $(Dh_\theta)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}(\theta)$ .

## 3.3 Borne de Cramer-Rao

### Rappels - cas univarié

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

### Inégalité de Cramér-Rao

Si  $\hat{\theta}$  est un estimateur *sans biais* de  $\theta$  alors

$$\mathbf{V}_\theta[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

où

$$I(\theta) = \mathbf{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right].$$

### Retour au cas multivarié

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .
- On désigne par  $L(x, \theta)$  la vraisemblance de  $\theta$  pour une observation  $x$ .

### Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$ .
- La vraisemblance est

$$L(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

## Matrice d'information de Fisher

### Définition

La *matrice d'information de Fisher* (si elle existe) au point  $\theta$  est la matrice de dimension  $2 \times 2$  de terme général

$$\begin{aligned} I(\theta)_{i,j} &= \mathbf{E}_\theta \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(L(X, \theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \\ &= - \mathbf{E}_\theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \end{aligned}$$

avec  $1 \leq i, j \leq 2$ .

### Exemple

Pour le modèle gaussien, la *matrice d'information de Fisher* est donnée par

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta = (\mu, \sigma^2).$$

## Borne de Cramer Rao

—  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

### Théorème

Si elle existe, la *borne de Cramer-Rao* du modèle précédent est  $\frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$ . C'est-à-dire que *pour tout estimateur sans biais*  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , on a

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \geq_{sdp} \frac{1}{n}I(\theta)^{-1}.$$

### Remarques

— L'inégalité est à prendre au sens des *matrices semi définies positives* :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad u' \Sigma_{\hat{\theta}} u \geq u' \left( \frac{1}{n}I(\theta)^{-1} \right) u.$$

— Interprétation *similaire au cas univarié* : la BCR vue comme une *matrice de variance covariance optimale* pour un estimateur *sans biais*.

## Retour au modèle gaussien

—  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S_n^2)$  est *sans biais*.

— Sa matrice de *variance covariance* est donnée par

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}.$$

— La *BCR* vaut

$$\frac{1}{n}I(\theta)^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

— *Conclusion* :  $\hat{\theta}$  n'est pas *VUMSB* (mais il n'est pas loin).

## Retour à l'emv

— L'emv possède, sous certaines hypothèses, de bonnes propriétés.

### "Propriété"

Sous certaines hypothèses de régularité sur la loi  $\mathbf{P}_\theta$ , l'emv  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  est

— *consistant* ;

— *asymptotiquement normal* :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

### En pratique...

— Les hypothèses de ce résultat sont *techniques* et généralement *difficiles à vérifier*.

— Il est souvent plus simple d'obtenir ce résultat en *travaillant sur l'emv* (c'est ce qu'il faudra faire).

## Cinquième partie

# Approche paramétrique vs non paramétrique pour les modèles de densité et de régression

### Dans ce chapitre

- Nous étudions deux problèmes classiques de la *théorie de l'estimation* : la *densité* et la *régression*.
- A travers ces deux problèmes, nous étudions le compromis entre les erreurs d'*estimation* et d'*approximation*.
- Ce compromis sera notamment étudié en confrontant l'approche *paramétrique* à l'approche *non paramétrique*.

### L'estimation de densité.

- Les données  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- L'échantillon :  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}$  *inconnue*.
- On suppose que  $\mathbf{P}$  admet une densité  $f$  (qui est donc *inconnue*).

### Le problème

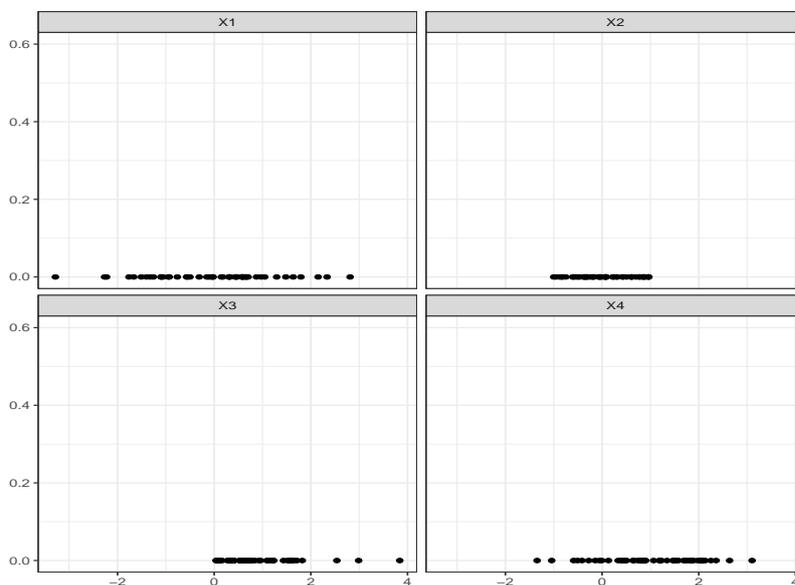
Estimer  $f$ .

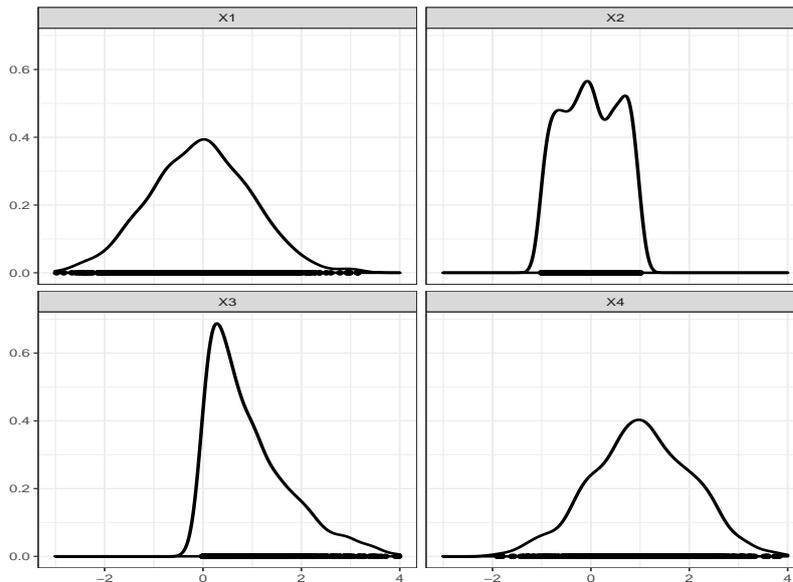
### Performance d'un estimateur

On mesurera la performance d'un estimateur  $\hat{f}(\cdot) = \hat{f}(\cdot, X_1, \dots, X_n)$  par son *risque quadratique ponctuel* :

$$\mathcal{R}(\hat{f}(x)) = \mathbf{E}((\hat{f}(x) - f(x))^2) = b^2(\hat{f}(x)) + \mathbf{V}(\hat{f}(x)).$$

### Exemple





### Le problème de la régression

- *Données* :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des *réalisations de v.a.*  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  *i.i.d.* telles qu'il existe une fonction *inconnue*  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont *i.i.d* de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

### Le problème

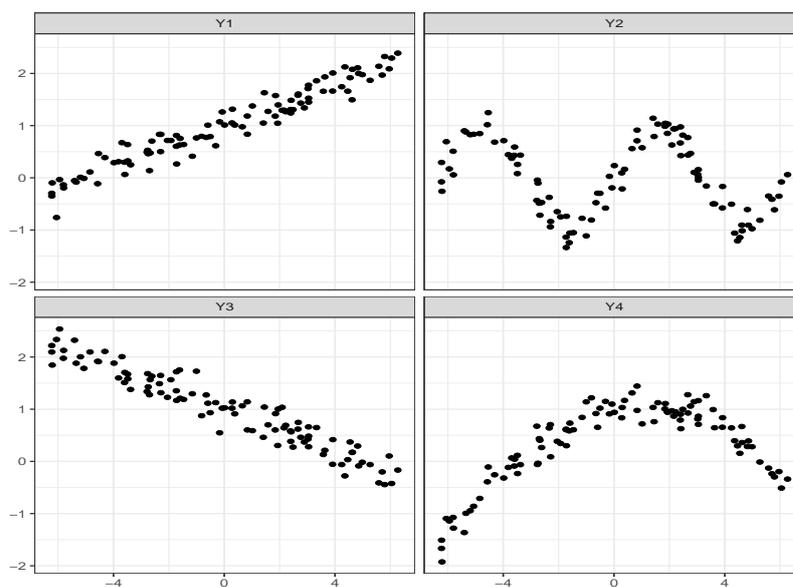
Estimer  $m$ .

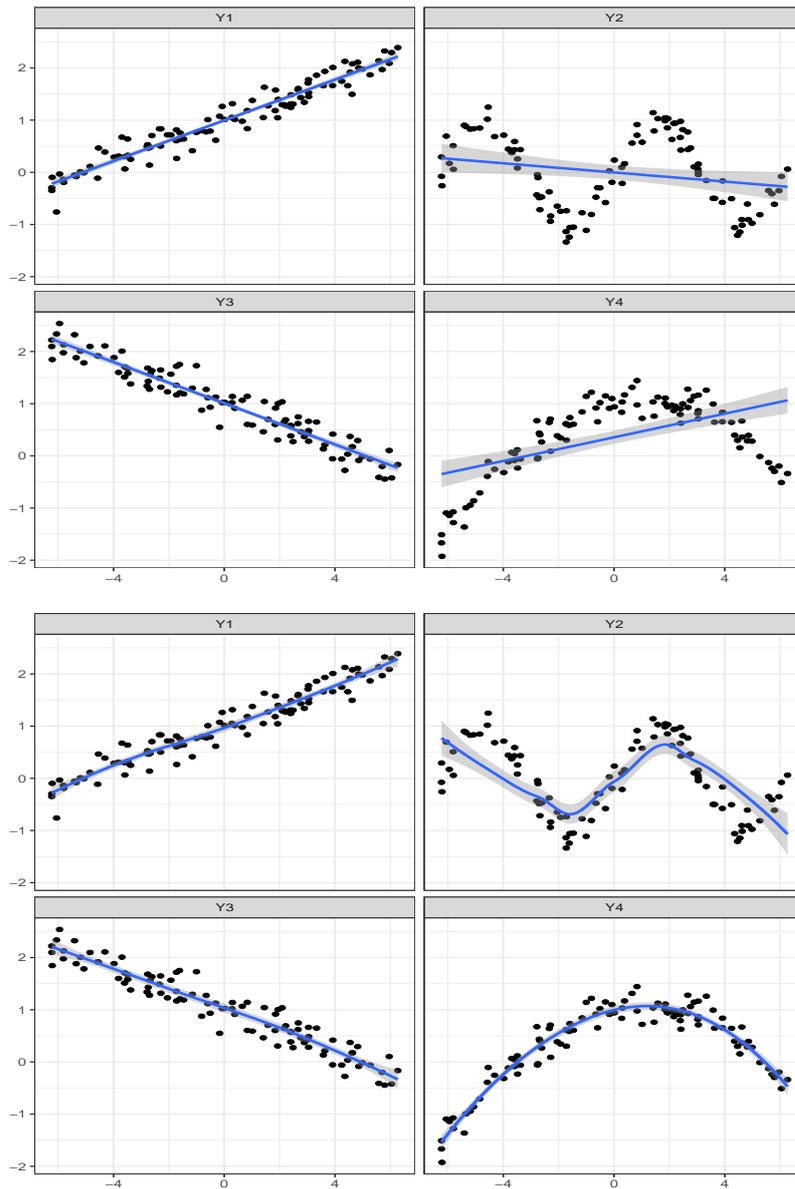
### Performance d'un estimateur

On mesurera la performance d'un estimateur  $\hat{m}(\cdot) = \hat{m}(\cdot, X_1, \dots, X_n)$  par son *risque quadratique ponctuel* :

$$\mathcal{R}(\hat{m}(x)) = \mathbf{E}((\hat{m}(x) - m(x))^2) = b^2(\hat{m}(x)) + \mathbf{V}(\hat{m}(x)).$$

### Exemple





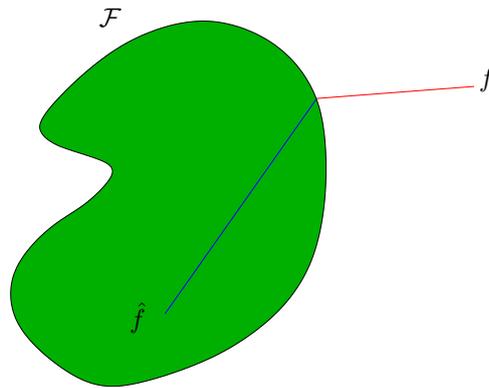
- Dans les deux cas, le problème est d'estimer une *fonction*.
- Poser un *modèle* revient à supposer que cette fonction appartient à un certain espace  $\mathcal{F}$ .

### Définition

- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension *finie*, le modèle est *paramétrique*.
- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension *infinie*, le modèle est *non paramétrique*.

### A priori

- *Non paramétrique* : plus flexible mais précision d'estimation plus faible.
- *Paramétrique* : meilleure précision d'estimation mais plus rigide.



- **Erreur d'estimation** : erreur commise par le choix d'une loi dans  $\mathcal{P}$  par rapport au meilleur choix.
- **Erreur d'approximation** : erreur commise par le choix de  $\mathcal{P}$ .

### Commentaire

Ces deux termes varient généralement *en sens inverse*.

## 1 Le modèle de densité

### 1.1 Approche paramétrique : le modèle Gaussien

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de densité  $f$  **inconnue**.
- On suppose que  $f \in \mathcal{F} = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  avec  $\Theta$  de dimension *finie*.

#### Exemple : le modèle Gaussien

- On suppose  $f \in \mathcal{F} = \{f_{\mu, \sigma^2}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ .
- **Le problème** : estimer  $\mu$  et  $\sigma^2$ .
- On peut estimer ces paramètres par *maximum de vraisemblance* :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- On montre "facilement" que

$$\mathbf{E}[(\hat{\mu} - \mu)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- En notant  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , on déduit

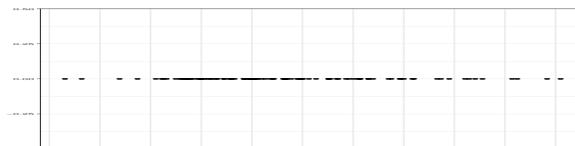
$$\mathbf{E}[\|\hat{\theta} - \theta\|^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

#### Remarque

$1/n$  est la *vitesse paramétrique* classique pour l'erreur quadratique.

#### Exemple

```
> df <- data.frame(X=rnorm(100))
> ggplot(df)+aes(x=X,y=0)+geom_point()+theme_bw()
```

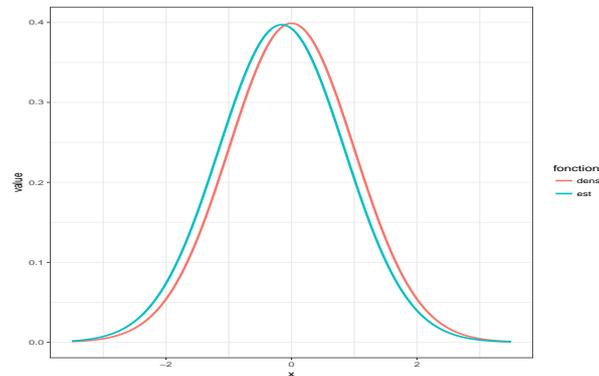


- On *estime*  $\mu$  et  $\sigma^2$  :

```
> theta <- c(mean(df$X), var(X))
> theta
[1] -0.1567617 1.0088300
```

— On trace l'*estimateur* et on le compare à la densité à estimer :

```
> x <- seq(-3.5, 3.5, by=0.01); dens <- dnorm(x, mean=0, sd=1)
> est <- dnorm(x, mean=theta[1], sd=sqrt(theta[2]))
> df1 <- data.frame(x, dens, est); df2 <- melt(df1, id.vars="x")
> names(df2)[2] <- "fonction"
> ggplot(df2)+aes(x=x, y=value, color=fonction)+geom_line(size=1)+theme_bw()
```



## 1.2 Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

### Des moyennes locales

- En l'absence d'hypothèse paramétrique forte, on se base sur ce qui se passe au *voisinage de x pour estimer*  $f(x)$ .
- L'*histogramme* est un estimateur non paramétrique bien connu.

### L'histogramme

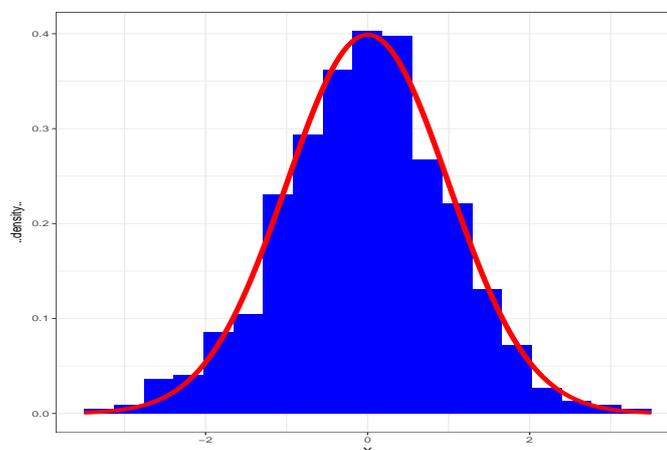
- $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_K\}$  une *partition* de  $\mathbb{R}$  en  $K$  intervalles.
- L'*histogramme* est défini par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n\lambda(I(x))} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in I(x)},$$

où  $I(x)$  désigne l'intervalle qui contient  $x$  et  $\lambda(I)$  la longueur de l'intervalle  $I$ .

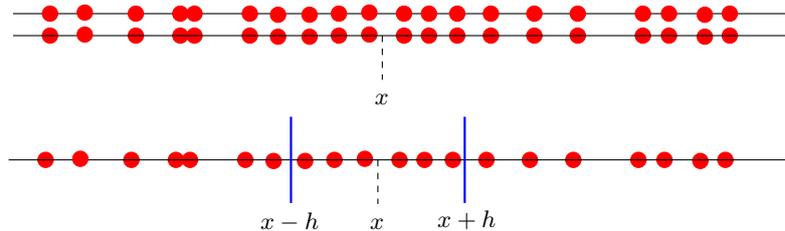
### Exemple

```
> ggplot(df)+aes(x=X, y=..density..) + geom_histogram(bins=20, fill="blue") +
  geom_line(data=df1, aes(x=x, y=dens), color="red", size=2) + theme_bw()
```



## Estimateurs à noyau

- L'histogramme n'est *pas continu*.
- L'*estimateur à noyau* permet de pallier à ce problème en *ne fixant pas de partition*.
- L'idée est d'utiliser une *fenêtre glissante*.
- $n = 20$  observations.
- On veut estimer la densité en  $x$ .
- On considère une fenêtre  $[x - h, x + h]$ .



- On fait comme pour l'histogramme

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in [x-h, x+h]}.$$

- On peut réécrire cet *estimateur*

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in [x-h, x+h]} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{1}_{-1 \leq \frac{x-X_i}{h} \leq 1} \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) \end{aligned}$$

avec  $K(u) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$ .

## Estimateur à noyau de la densité

### Définition [Parzen, 1962]

Etant donné  $h > 0$  et  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et tel que  $\int K(u) du = 1$ , l'*estimateur à noyau* de la densité est défini par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right).$$

### Remarque

L'utilisateur doit *choisir deux paramètres* : un réel positif  $h$  et un noyau  $K$

## Exemples de noyau

Les noyaux suivants sont les plus utilisés :

- *Uniforme* :

$$K(u) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u).$$

- *Gaussien* :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

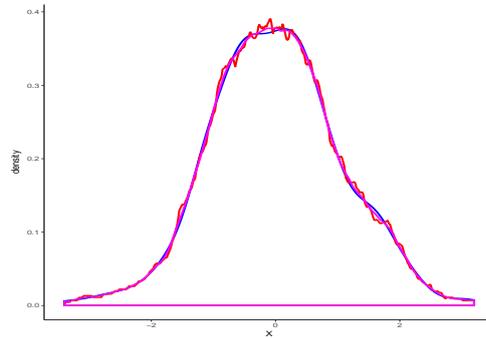
- *Epanechnikov* :

$$K(u) = \frac{3}{4} (1 - u^2) \mathbf{1}_{[-1,1]}(u).$$

```

> X <- rnorm(500)
> df <- data.frame(X)
> ggplot(df)+aes(X)+geom_density(kernel=c("gaussian"),color="blue",size=1)+
  geom_density(kernel=c("rectangular"),color="red",size=1)+
  geom_density(kernel=c("epanechnikov"),color="black",size=1)+theme_classic()

```



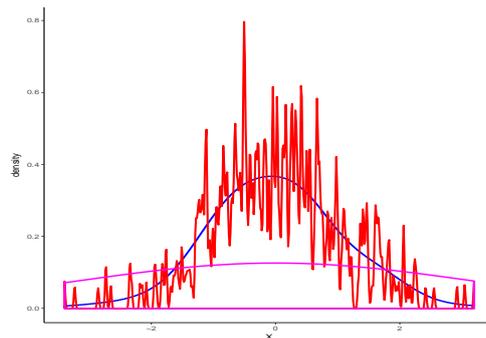
### Conclusion

Le choix du noyau n'est généralement *pas primordial* sur la performance de l'estimateur.

```

> X <- rnorm(500)
> df <- data.frame(X)
> ggplot(df)+aes(X)+geom_density(bw=0.4,color="blue",size=1)+
  geom_density(bw=0.01,color="red",size=1)+
  geom_density(bw=3,color="magenta",size=1)+theme_classic()

```



### Conclusion

Le choix de la fenêtre  $h$  est *crucial* sur la performance de l'estimateur.

### Choix de $h$

- $h$  *grand* : fenêtre grande  $\implies$  beaucoup d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités proches  $\forall x \implies$  *biais fort, variance faible*.
- $h$  *petit* : fenêtre petite  $\implies$  peu d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités instables  $\forall x \implies$  *biais faible, variance forte*.

### Conclusion

- Le paramètre  $h$  régule le *compromis biais/variance* de l'estimateur à noyau.
- On sait le quantifier mathématiquement.

### Contrôle de la variance

#### Théorème

On suppose que :

- $f$  est bornée.
- $K$  est tel que  $\int K(u) du = 1$ ,  $\int uK(u) du = 0$  et  $\int K(u)^2 du < +\infty$ .

Modèle	param	non-param
Vitesse	$n^{-1}$	$n^{-\frac{4}{5}}$

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$  et  $\forall n \geq 1$

$$\mathbf{V}[\hat{f}(x)] = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

### Remarque

On retrouve bien que la **variance** est *faible* lorsque  $h$  est *grand* et réciproquement.

### Contrôle du biais

— Pour le terme de biais, il faut supposer un peu de *régularité* sur la densité à estimer.

### Théorème

On suppose que

— la densité  $f$  est *dérivable* et que sa dérivée est *Lipschitzienne* :

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

—  $K$  est tel que  $\int u^2 K(u) du < +\infty$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|b(\hat{f}(x))| = O(h^2).$$

### Remarque

On retrouve bien le **biais** est *faible* lorsque  $h$  est *petit* et réciproquement.

### Risque quadratique

#### Corollaire (convergence $L_2$ )

Sous les hypothèse des deux théorèmes précédents, on déduit que si  $h \rightarrow 0$  et  $nh \rightarrow +\infty$  alors le risque quadratique de  $\hat{f}(x)$  tend vers 0 (*convergence en moyenne d'ordre 2*).

#### Corollaire (choix de $h$ )

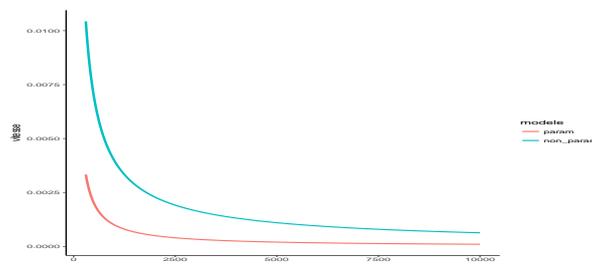
Le  $h^*$  qui **minimise l'erreur quadratique** vérifie

$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$

Pour cette valeur de  $h$ , on a

$$\mathcal{R}(\hat{f}(x)) = \mathbf{E}[(\hat{f}(x) - f(x))^2] = O\left(n^{-\frac{4}{5}}\right).$$

### Remarque importante



### Conclusion

- La convergence est *moins rapide* dans les modèles *non-paramétrique*.
- C'est le *prix à payer* pour *plus de flexibilité*.

- La théorie nous dit que le  $h$  optimal est

$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$

- Ce résultat n'est quasiment d'*aucune utilité pratique*.
- En pratique, il existe un grand nombre de *procédures automatiques* (plus ou moins performantes selon les cas) permettant de sélectionner  $h$ .

## 2 Le modèle de régression

### Présentation du modèle

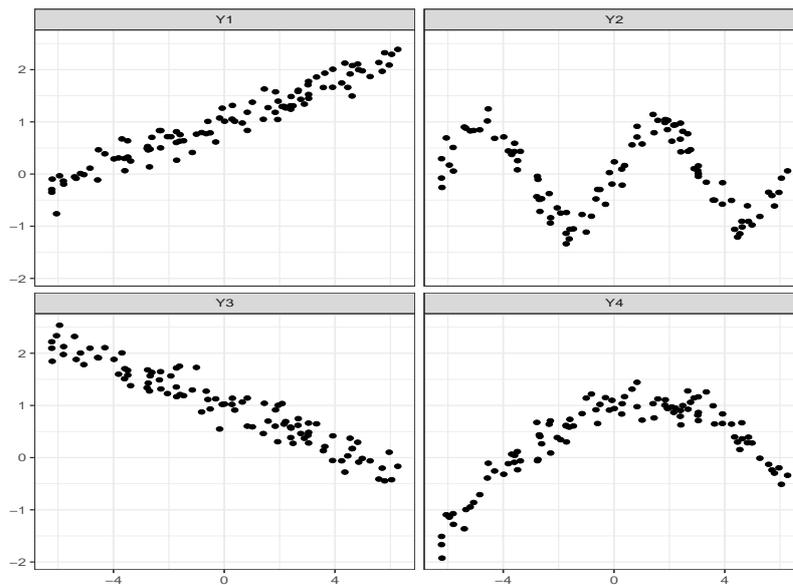
- *Les données* :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  où  $y_i \in \mathbb{R}$  et  $x_i \in \mathbb{R}$  (pour simplifier).
- *L'échantillon*  $(x_1, Y_1) \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d. (on suppose que les  $x_i$  sont déterministes).
- *Le problème* : expliquer les sorties  $Y_i$  par les entrées  $X_i$ .
- *La fonction de régression* : c'est la fonction  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$Y_i = m(x_i) + \varepsilon_i$$

où les termes d'erreurs  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

- *Le problème statistique* : estimer  $m$ .

### Exemples



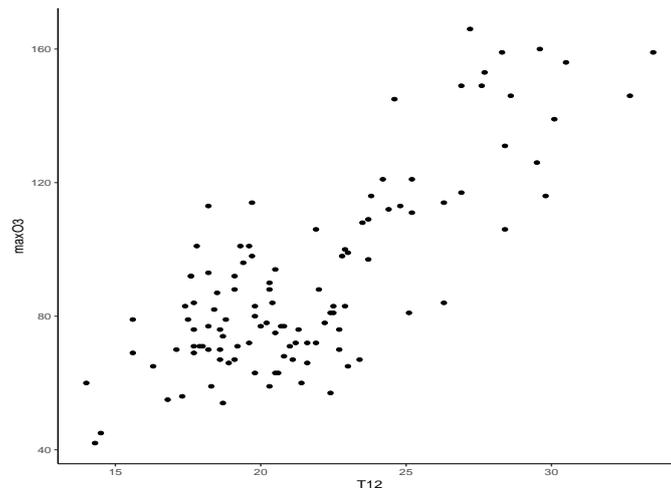
### Un exemple concret

- On souhaite expliquer la *concentration en ozone* par la *température à 12h*.
- $n = 112$  observations :

```
> ozone %>% select(maxO3,T12) %>% head()
  maxO3  T12
20010601  87 18.5
20010602  82 18.4
20010603  92 17.6
20010604 114 19.7
20010605  94 20.5
20010606  80 19.8
```

### Représentation du nuage

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()+theme_classic()
```



## 2.1 Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

### Le modèle linéaire

- On fait l'hypothèse que la fonction de régression est *linéaire* :

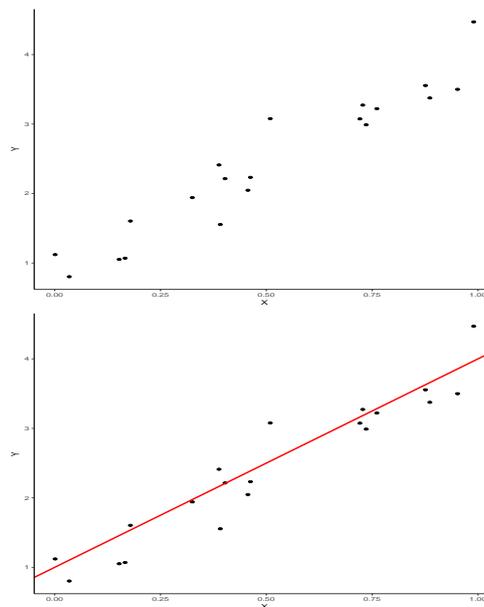
$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

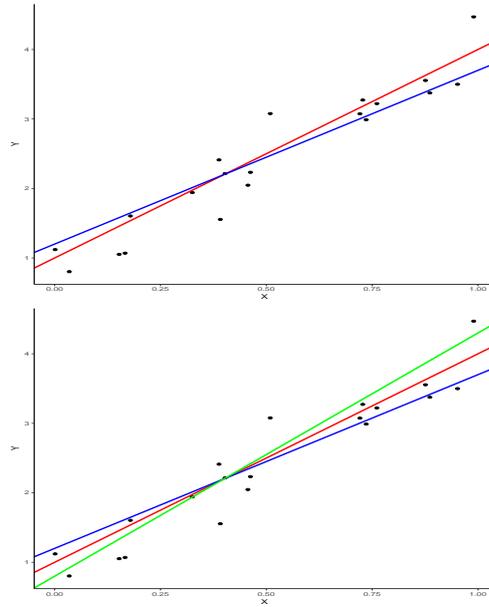
- Paramètres *inconnus* à estimer :  $\beta = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \implies$  modèle *paramétrique*.

### Ajustement linéaire d'un nuage de points

#### Notations

- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la *variable à expliquer* (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la *variable explicative* (T12).



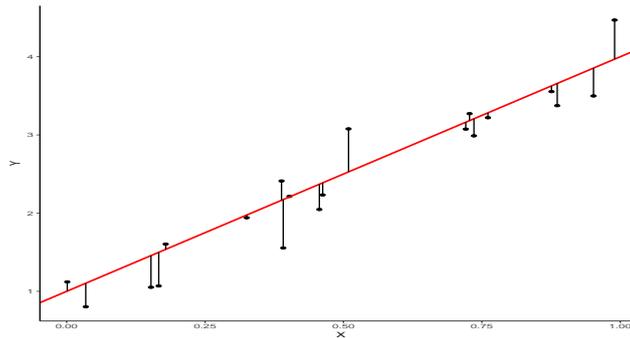


### Le problème

Trouver la droite qui ajuste *au mieux* le nuage de points.

- On cherche  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  qui *ajuste au mieux le nuage des points*.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent *pas sur une droite* :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$



### Idée

Chercher à minimiser les **erreurs** ou les **bruits**  $\varepsilon_i$ .

### Le critère des moindres carrés

#### Critère des MC

On cherche  $\beta = (\beta_0, \beta_1)$  qui minimise

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

### Solution

La solution est donnée par :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

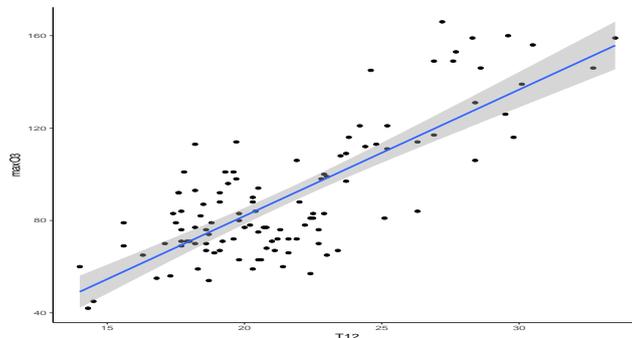
à condition que tous les  $x_i$  ne soient pas égaux.

### Application à l'ozone

```

> modele.lin <- lm(maxO3~T12,data=ozone)
> modele.lin
Coefficients:
(Intercept)      T12
      -27.420      5.469
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()+theme_classic()+
      geom_smooth(method="lm")

```



## Les estimateurs des MCO

### Rappels

- Le *modèle*

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où les  $\varepsilon_i$  sont *i.i.d.* de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

- Les *estimateurs des MCO* :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

### Propriétés

- *Biais* :  $\mathbf{E}[\hat{\beta}_0] = \beta_0$  et  $\mathbf{E}[\hat{\beta}_1] = \beta_1$ .

- *Variance* :

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

### Quelques remarques

- Les estimateurs des MCO sont *sans biais*.
- Sous des hypothèses peu contraignantes, on montre que leur *variance est en 1/n*. On déduit

$$\mathcal{R}(\hat{\beta}_0) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\hat{\beta}_1) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

### Conclusion

Les estimateurs des MCO atteignent la *vitesse paramétrique classique* en  $1/n$ .

- On peut également obtenir la *loi des estimateurs*  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$ .
- On déduit de cette loi des *intervalles de confiance* et des *procédures de tests statistiques*.

### IC et tests pour l'ozone

- *Intervalles de confiance* :

```

> confint(modele.lin)
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -45.321901 -9.517371
T12          4.651219  6.286151

```

— Tests statistique :

```
> summary(modele.lin)$coefficients
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -27.419636  9.0334940 -3.03533 2.999431e-03
T12          5.468685  0.4124939 13.25761 1.512025e-24
```

## 2.2 Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

- En l'absence d'hypothèse paramétrique (forte), on regarde ce qui se passe au voisinage du point où on cherche à estimer la fonction de régression.
- Les méthodes non paramétriques consistent donc à définir des voisinages et à faire des moyennes locales à l'intérieur des voisinages :

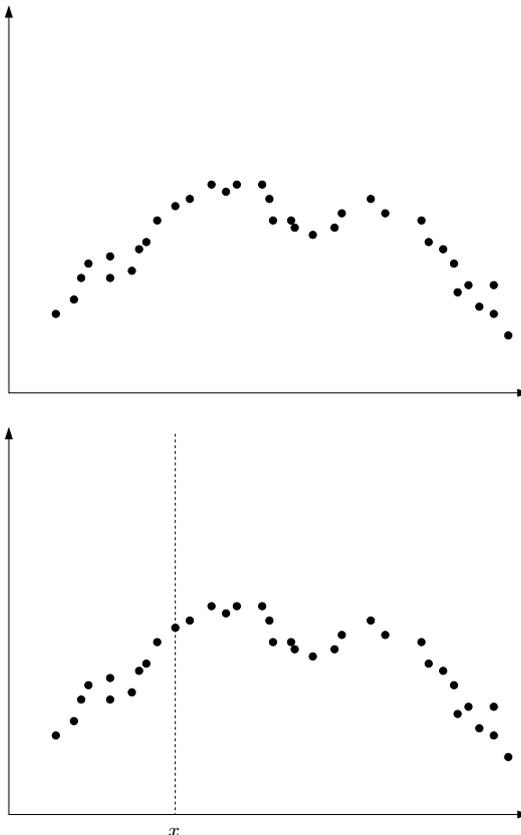
$$\hat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_i$$

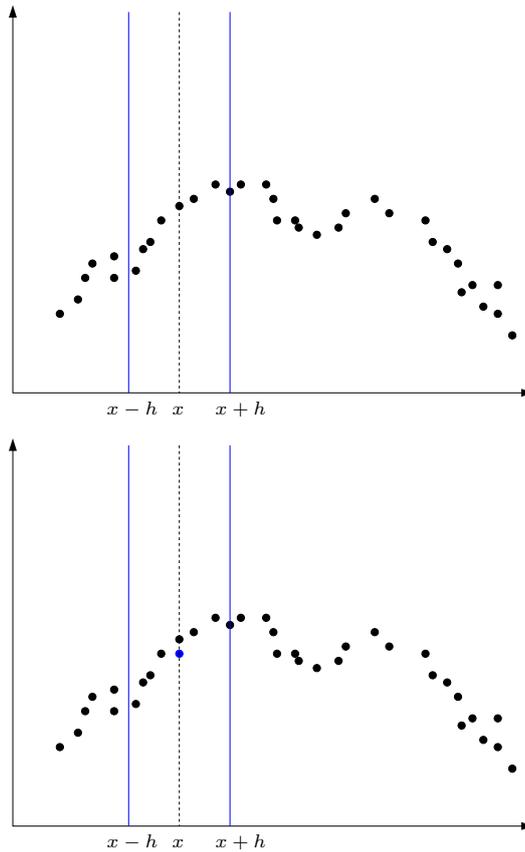
où  $W_{ni}(x)$  représente le poids à accorder à la  $i$ ème observation pour estimer  $m$  en  $x$ .

- Nous illustrons ce principe à travers l'estimateur de Nadaraya Watson [Nadaraya, 1964, Watson, 1964] (on aurait aussi pu faire l'algorithme des plus proches voisins).

### La méthode

- $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d.
- But : estimer  $m$  tel que  $Y = m(x) + \varepsilon$ .





— L'estimateur s'écrit

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1}}.$$

### Définition

Soit  $h > 0$  et  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . L'estimateur à noyau de *fenêtre*  $h$  et de *noyau*  $K$  est défini par

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)}.$$

### Noyau et fenêtre

— *Noyau usuel* :

1. *Uniforme* :  $K(x) = \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$  ;
2. *Gaussien* :  $K(x) = \exp(-|x|^2)$  ;
3. *Epanechnikov* :  $K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{|x| \leq 1}$ .

— Le choix de  $h$  est *crucial* pour la qualité de l'estimation :

1. *h grand* : estimateur « constant », variance faible, biais fort ;
2. *h petit* : « interpolation », variance forte, biais faible ;

### Un exemple

— On génère un échantillon  $(X_I, Y_I), i = 1, \dots, n = 200$  selon

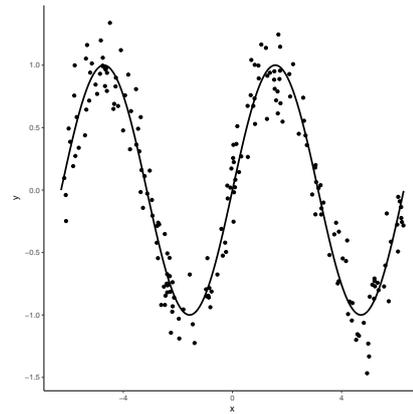
$$Y_i = \sin(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec  $X_i$  uniforme sur  $[-2\pi, 2\pi]$ ,  $\varepsilon_i$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 0.2^2)$ .

```

> n <- 200; set.seed(1234)
> X <- runif(n,-2*pi,2*pi)
> set.seed(5678)
> eps <- rnorm(n,0,0.2)
> Y <- sin(X)+eps
> df <- data.frame(X=X,Y=Y)
> x <- seq(-2*pi,2*pi,by=0.01)
> df1 <- data.frame(x=x,y=sin(x))
> ggplot(df1)+aes(x=x,y=y)+
  geom_line(size=1)+
  geom_point(data=df,aes(x=X,y=Y))

```

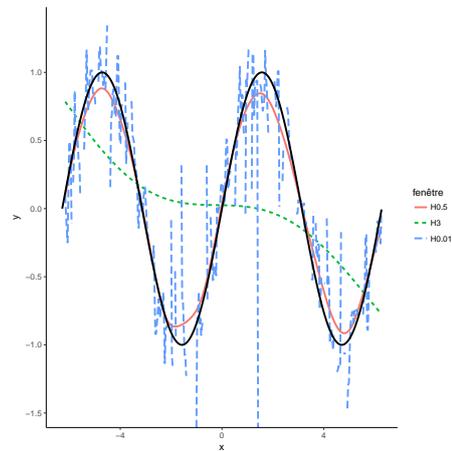


— La fonction *locpoly* du package *kernSmooth* permet de construire des estimateurs à noyau.

```

> h1 <- 0.5;h2 <- 3;h3 <- 0.01
> fx1 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h1)
> fx2 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h2)
> fx3 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h3)
> df1 <- data.frame(x=x,y=sin(x))
> df2 <- data.frame(x=fx1$y,
  "H0.5"=fx1$y,"H3"=fx2$y,
  "H0.01"=fx3$y)
> df22 <- melt(df2,id.vars=1)
> names(df22)[2:3] <- c("fenêtre",
  "y")
> ggplot(df22)+aes(x=x,y=y)+
  geom_line(aes(color=fenêtre,
  lty=fenêtre))+geom_line
  (data=df1,aes(x=x,y=y),size=1)

```



## Propriétés des estimateurs

- Là encore, on peut quantifier le *compromis biais/variance*.
- On considère le noyau uniforme et on suppose que  $m$  est dérivable et que sa dérivée est Lipschitzienne :

$$|m'(x) - m'(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}.$$

### Théorème

Sous les hypothèses ci-dessus, on a

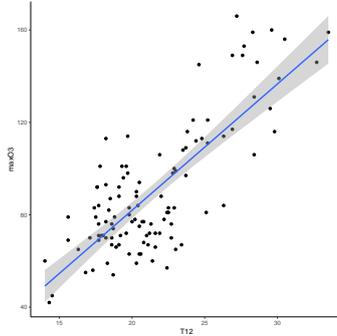
$$|b(\hat{m}_n(x))| = O(h^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\hat{m}_n(x)] = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

- Toutes les remarques faites pour l'estimateur à noyau de la densité sont valables pour l'estimateur de Nadaraya Watson.
- Le *h optimal* est de l'ordre de  $n^{-1/5}$ . Pour cette valeur de  $h$ , le *risque quadratique* est de l'ordre de  $n^{-4/5}$ .
- On obtient donc une vitesse de convergence *plus lente* que pour les estimateurs paramétriques.
- C'est le *prix à payer* pour un modèle *plus flexible*.

## Retour à l'ozone

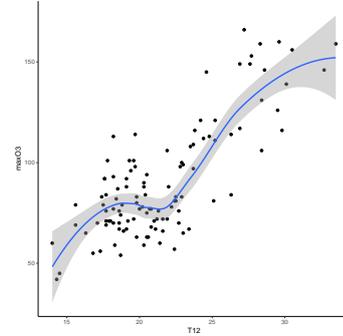
## Paramétrique (linéaire)

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+  
geom_point()+  
geom_smooth(method="lm",size=1)+  
theme_classic()
```



## Non paramétrique

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+  
geom_point()+  
geom_smooth(size=1)+  
theme_classic()
```



## 3 Bibliographie

### Références

#### Biblio5

- [Nadaraya, 1964] Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability and its Applications*, 9.
- [Parzen, 1962] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Stat.*, 33 :1065–1076.
- [Watson, 1964] Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series A*, 26 :359–372.