Statistique

L. Rouvière
laurent.rouviere@univ-rennes2.fr

Avril 2017

UNIVERSITÉ RENNES 2

Première partie I

Présentation de l'enseignement

Modèle

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Mathématiquement, un modèle est un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

A quoi sert un modèle ?

Expliquer, décrire les mécanismes du phénomène considéré.

- Question : quel est le lien entre la définition mathématique et l'utilité du phénomène ?

Modèle

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Mathématiquement, un modèle est un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

A quoi sert un modèle ?

Expliquer, décrire les mécanismes du phénomène considéré.

- Question : quel est le lien entre la définition mathématique et l'utilité du phénomène ?

Modèle

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Mathématiquement, un modèle est un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

A quoi sert un modèle ?

Expliquer, décrire les mécanismes du phénomène considéré.

- Question : quel est le lien entre la définition mathématique et l'utilité du phénomène ?

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Mathématiquement, un modèle est un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

A quoi sert un modèle ?

Expliquer, décrire les mécanismes du phénomène considéré.

- Question : quel est le lien entre la définition mathématique et l'utilité du phénomène ?

Modèle

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Mathématiquement, un modèle est un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

A quoi sert un modèle ?

Expliquer, décrire les mécanismes du phénomène considéré.

- Question : quel est le lien entre la définition mathématique et l'utilité du phénomène ?

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite $n = 100$ patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

- Soit p_0 la probabilité de guérison suite au traitement en question.
- On est tentés de conclure $p_0 \approx 0.72$.

Un tel résultat n'a cependant guère d'intêret si on n'est pas capable de préciser l'erreur susceptible d'être commise par cette estimation.

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite $n = 100$ patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

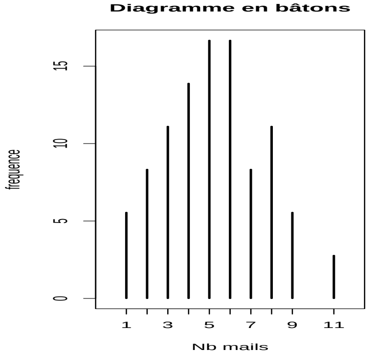
- Soit p_0 la probabilité de guérison suite au traitement en question.
- On est tentés de conclure $p_0 \approx 0.72$.

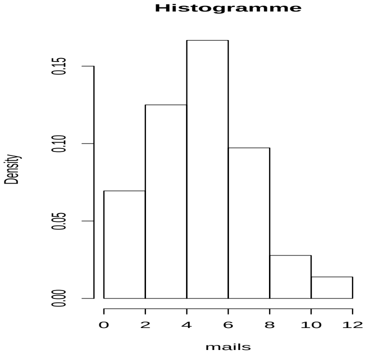
Un tel résultat n'a cependant guère d'intêret si on n'est pas capable de préciser l'erreur susceptible d'être commise par cette estimation.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple 2

- On s'intéresse au nombre de mails reçus par jour par un utilisateur pendant 36 journées.
- $\bar{x} = 5.22$, $S_n^2 = 5.72$.

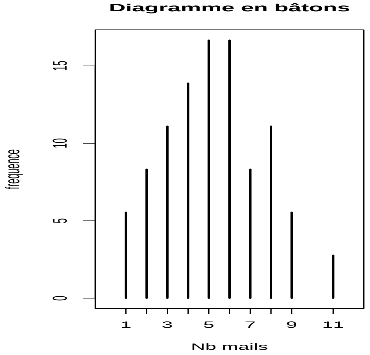


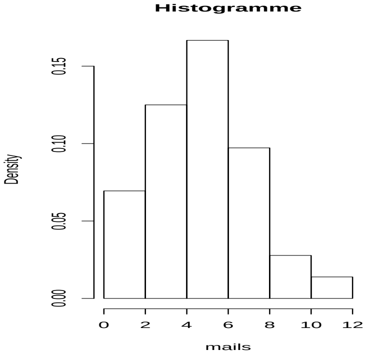


Quelle est la probabilité de recevoir plus de 5 mails dans une journée ?

Exemple 2

- On s'intéresse au nombre de mails reçus par jour par un utilisateur pendant 36 journées.
- $\bar{x} = 5.22$, $S_n^2 = 5.72$.

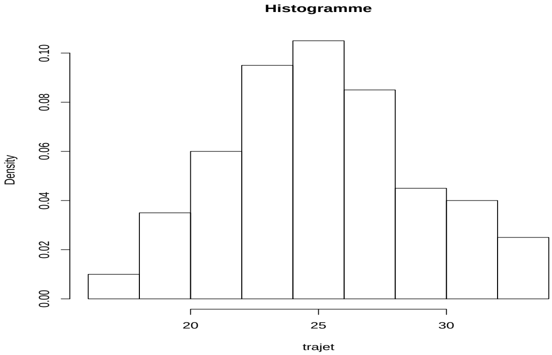




Quelle est la probabilité de recevoir plus de 5 mails dans une journée ?

Exemple 3

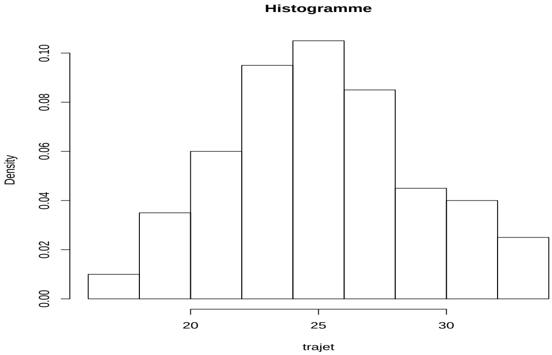
- Durée de trajet domicile-travail.
- On dispose de $n = 100$ mesures : $\bar{x} = 25.1$, $S_n^2 = 14.46$.



J'ai une réunion à 8h30, quelle est la probabilité que j'arrive en retard si je pars de chez moi à 7h55 ?

Exemple 3

- Durée de trajet domicile-travail.
- On dispose de $n = 100$ mesures : $\bar{x} = 25.1$, $S_n^2 = 14.46$.



J'ai une réunion à 8h30, quelle est la probabilité que j'arrive en retard si je pars de chez moi à 7h55 ?

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

UNIVERSITÉ RENNES 2

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénomènes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

Variables aléatoires

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénomènes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénomènes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

Loi de probabilité

Loi de probabilité

Etant donnée $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on appelle loi de probabilité de X la mesure $\mathbf{P}_X$ définie par

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Une loi de probabilité est caractérisée par

- sa fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.
- sa densité : $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\, d\mu(x).$$

Loi de probabilité

Etant donnée $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on appelle loi de probabilité de X la mesure $\mathbf{P}_X$ définie par

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Une loi de probabilité est caractérisée par

- sa fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.
- sa densité : $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\, d\mu(x).$$

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de Bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi (i.i.d.).

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Un modèle pour l'exemple 1

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de Bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi (i.i.d.).

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de Bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi (i.i.d.).

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un *n-échantillon* de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$.

Modèle linéaire (paramétrique)

- On pose

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$

où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$.

Modèle linéaire (paramétrique)

- On pose

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$

où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$.

Modèle linéaire (paramétrique)

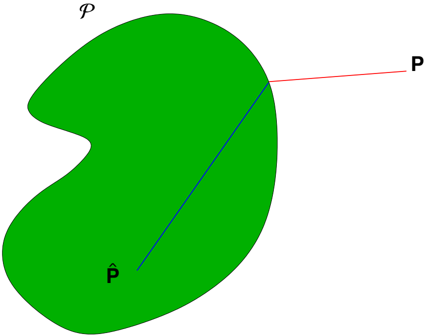
- On pose
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$
- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose
$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$
où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

2 types d'erreur

- Poser un modèle revient à choisir une famille de loi candidates pour reconstruire la loi des données **P**.

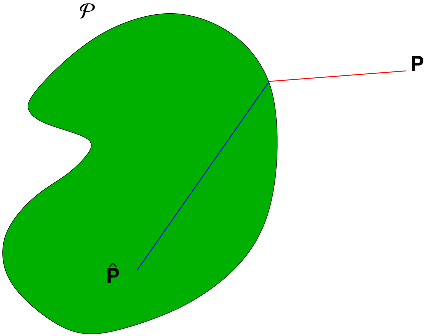


On distingue deux types d'erreurs :

- Erreur d'estimation : erreur commise par le choix d'une loi dans $\mathcal{P}$ par rapport au meilleur choix.
- Erreur d'approximation : erreur commise par le choix de $\mathcal{P}$.

2 types d'erreur

- Poser un modèle revient à choisir une famille de loi candidates pour reconstruire la loi des données **P**.



On distingue deux types d'erreurs :

- Erreur d'estimation : erreur commise par le choix d'une loi dans $\mathcal{P}$ par rapport au meilleur choix.
- Erreur d'approximation : erreur commise par le choix de $\mathcal{P}$.

La modélisation

1. On récolte n observations (n valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de n expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation :** on suppose que les n valeurs sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.
3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit le plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.
4. **"Validation" de modèle** : on revient en arrière et on tente de vérifier si l'hypothèse de l'étape 2 est raisonnable (test d'adéquation, etc...)

La modélisation

1. On récolte n observations (n valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de n expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation :** on suppose que les n valeurs sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.
3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit le plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.
4. **"Validation" de modèle** : on revient en arrière et on tente de vérifier si l'hypothèse de l'étape 2 est raisonnable (test d'adéquation, etc...)

La modélisation

1. On récolte n observations (n valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de n expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation :** on suppose que les n valeurs sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.
3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit le plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.
4. **"Validation" de modèle** : on revient en arrière et on tente de vérifier si l'hypothèse de l'étape 2 est raisonnable (test d'adéquation, etc...)

La modélisation

1. On récolte n observations (n valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de n expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation :** on suppose que les n valeurs sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.
3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit le plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.
4. **"Validation" de modèle** : on revient en arrière et on tente de vérifier si l'hypothèse de l'étape 2 est raisonnable (test d'adéquation, etc...)

Objectifs

1. Formaliser mathématiquement les étapes de modélisation et d'estimation.
2. Proposer des procédures automatiques permettant construire des "bons estimateurs".
3. Mesurer la performance des estimateurs.

Outils

Les techniques permettant de répondre à ces 3 objectifs font appel à la théorie des probabilités.

Objectifs

1. Formaliser mathématiquement les étapes de modélisation et d'estimation.
2. Proposer des procédures automatiques permettant construire des "bons estimateurs".
3. Mesurer la performance des estimateurs.

Outils

Les techniques permettant de répondre à ces 3 objectifs font appel à la théorie des probabilités.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Plan du cours

1. Notions de statistiques descriptives : indicateurs permettant de synthétiser l'information contenue dans un tableau de données : cas univariés (moyenne, médiane, variance...), bivariés (corrélation), multivariés (analyse en composante principale).
2. Modèle statistique et estimation : formulation mathématique du problème de modélisation, construction et mesure de performance (à distance finie et asymptotique) d'estimateurs.
3. Tests d'hypothèses : théorie de la décision, notions de risque, construction de tests (principe de Neyman-Pearson).
4. Le modèle de régression linéaire : adaptation des outils développés dans les chapitres précédents pour répondre à un problème de régression.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Plan du cours

1. Notions de statistiques descriptives : indicateurs permettant de synthétiser l'information contenue dans un tableau de données : cas univariés (moyenne, médiane, variance...), bivariés (corrélation), multivariés (analyse en composante principale).
2. Modèle statistique et estimation : formulation mathématique du problème de modélisation, construction et mesure de performance (à distance finie et asymptotique) d'estimateurs.
3. Tests d'hypothèses : théorie de la décision, notions de risque, construction de tests (principe de Neyman-Pearson).
4. Le modèle de régression linéaire : adaptation des outils développés dans les chapitres précédents pour répondre à un problème de régression.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Plan du cours

1. Notions de statistiques descriptives : indicateurs permettant de synthétiser l'information contenue dans un tableau de données : cas univariés (moyenne, médiane, variance...), bivariés (corrélation), multivariés (analyse en composante principale).
2. Modèle statistique et estimation : formulation mathématique du problème de modélisation, construction et mesure de performance (à distance finie et asymptotique) d'estimateurs.
3. Tests d'hypothèses : théorie de la décision, notions de risque, construction de tests (principe de Neyman-Pearson).
4. Le modèle de régression linéaire : adaptation des outils développés dans les chapitres précédents pour répondre à un problème de régression.

Plan du cours

1. Notions de statistiques descriptives : indicateurs permettant de synthétiser l'information contenue dans un tableau de données : cas univariés (moyenne, médiane, variance...), bivariés (corrélation), multivariés (analyse en composante principale).
2. Modèle statistique et estimation : formulation mathématique du problème de modélisation, construction et mesure de performance (à distance finie et asymptotique) d'estimateurs.
3. Tests d'hypothèses : théorie de la décision, notions de risque, construction de tests (principe de Neyman-Pearson).
4. Le modèle de régression linéaire : adaptation des outils développés dans les chapitres précédents pour répondre à un problème de régression.

Deuxième partie II

Statistiques descriptives

UNIVERSITÉ RENNES 2

Vocabulaire (voir Saporta : Probabilités, analyse des données et statistique)

- **Population** : ensemble d'objets de même nature.
- **Individu** : élément de cette population.
- **Variable** : caractéristique étudiée sur la population.
- **Echantillon** : sous ensemble de la population dont les individus feront l'objet de l'étude

UNIVERSITÉ RENNES 2

- On s'intéresse aux performances de décathloniens de haut niveau dans les 10 disciplines qui composent ce sport.
- On dispose des performances de $n = 41$ athlètes réalisées au cours des JO et au décastar :

	X100m	Longueur	Poids	Hauteur	X400m	X110mH	Disque	Perche
Sebrle	10.85	7.84	16.36	2.12	48.36	14.05	48.72	5.0
Clay	10.44	7.96	15.23	2.06	49.19	14.13	50.11	4.9
Karpov	10.50	7.81	15.93	2.09	46.81	13.97	51.65	4.6
Macey	10.89	7.47	15.73	2.15	48.97	14.56	48.34	4.4
Warners	10.62	7.74	14.48	1.97	47.97	14.01	43.73	4.9

	Javelot	X1500m	Classement	Points	Competition
Sebrle	70.52	280.01	1	8893	OlympicG
Clay	69.71	282.00	2	8820	OlympicG
Karpov	55.54	278.11	3	8725	OlympicG
Macey	58.46	265.42	4	8414	OlympicG
Warners	55.39	278.05	5	8343	OlympicG

- **Population** : ensemble des décathloniens de haut niveau.
- **Individu** : un décathlonien de haut niveau.
- **Variables** : performances dans chacune des 10 disciplines.
- **Echantillon** : les décathloniens ayant participé au JO ou au décastar.

UNIVERSITÉ RENNES 2

La statistique exploratoire

- But : synthétiser, résumer, structurer l'information contenue dans un tableau de données.
- Comment ? : représentations sous forme de tableaux, de graphiques, d'indicateurs numériques.
- Exemple : calcul de la longueur moyenne sautée dans l'épreuve de saut en longueur...

UNIVERSITÉ RENNES 2

La statistique inférentielle

- But : étendre les propriétés constatées sur l'échantillon à la population toute entière.
- Comment ? : les méthodes font généralement appel à la théorie des probabilités (construction d'intervalles de confiance, de tests d'hypothèses).
- Exemple : peut-on dire que les performances des athlètes sont meilleurs aux JO qu'au décastar ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Typologie des variables

Les méthodes diffèrent selon le type de variables :

- quantitative : additionner les modalités à un sens.
  - continue : la variable prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ (taille, poids, saut en longueur...) ;
  - discrète : nombre fini ou dénombrable de valeurs (nombre de personnes dans une file d'attente à un moment donnée, classement du décathlon...).
- qualitative : additionner les modalités n'a pas de sens.
  - ordinale : relation d'ordre entre les modalités (type de mention à un examen) ;
  - nominale : sinon (type de traitement subi, CSP).

UNIVERSITÉ RENNES 2

Mesures de tendance centrale

On note $x_1, \ldots, x_n$ n observations d'une variable quantitative X.

- moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- médiane : "valeur qui coupe l'échantillon en 2". On la définit à partir de la fonction de répartition empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}.$$

- médiane : plus petite valeur M telle que $F_n(x) \geq 0.5$:

$$M = \inf\{x : F_n(x) \geq 0.5\}.$$

- quantile d'ordre α : plus petite valeur q_α telle que $F_n(x) \geq \alpha$:

$$q_\alpha = \inf\{x : F_n(x) \geq \alpha\}.$$

Mesures de tendance centrale

On note $x_1, \ldots, x_n$ n observations d'une variable quantitative X.

- moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- médiane : "valeur qui coupe l'échantillon en 2". On la définit à partir de la fonction de répartition empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}.$$

- médiane : plus petite valeur M telle que $F_n(x) \geq 0.5$:

$$M = \inf\{x : F_n(x) \geq 0.5\}.$$

- quantile d'ordre α : plus petite valeur q_α telle que $F_n(x) \geq \alpha$:

$$q_\alpha = \inf\{x : F_n(x) \geq \alpha\}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Mesures de tendance centrale

On note $x_1, \ldots, x_n$ n observations d'une variable quantitative X.

- moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.
- médiane : "valeur qui coupe l'échantillon en 2". On la définit à partir de la fonction de répartition empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}.$$

- médiane : plus petite valeur M telle que $F_n(x) \geq 0.5$:

$$M = \inf\{x : F_n(x) \geq 0.5\}.$$

- quantile d'ordre α : plus petite valeur q_α telle que $F_n(x) \geq \alpha$:

$$q_\alpha = \inf\{x : F_n(x) \geq \alpha\}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Mesures de tendance centrale

On note $x_1, \ldots, x_n$ n observations d'une variable quantitative X.

- moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- médiane : "valeur qui coupe l'échantillon en 2". On la définit à partir de la fonction de répartition empirique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}.$$

- médiane : plus petite valeur M telle que $F_n(x) \geq 0.5$:

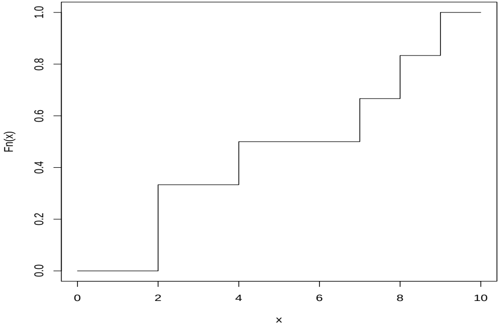
$$M = \inf\{x : F_n(x) \geq 0.5\}.$$

- quantile d'ordre α : plus petite valeur q_α telle que $F_n(x) \geq \alpha$:

$$q_\alpha = \inf\{x : F_n(x) \geq \alpha\}.$$

Exemple

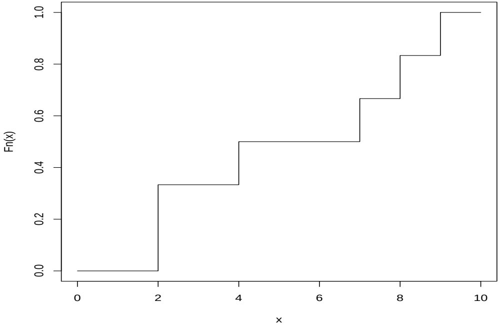
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	2	2	8	7	9



$$M = 4, \quad q_{0.25} = 2, \quad q_{5/6} = 8.$$

Exemple

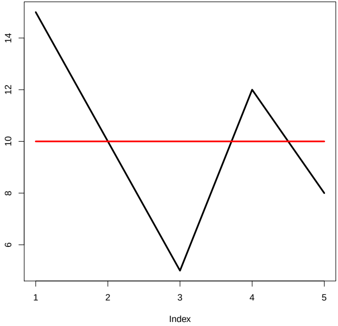
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	2	2	8	7	9



$$M = 4, \quad q_{0.25} = 2, \quad q_{5/6} = 8.$$

- Mesurer la tendance centrale n'est pas suffisant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}$	M
10	10	10	10	10	10	10
15	10	5	12	8	10	10



- Variance :

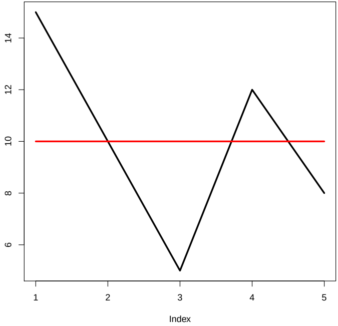
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

- série 1 : $S_n^2 = 0$, série 2 $S_n^2 = \frac{1}{5}(5^2 + 0^2 + ...) = 11.6$.
- Conclusion : les observations de la série 2 sont plus dispersées autour de leur moyenne.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- Mesurer la tendance centrale n'est pas suffisant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}$	M
10	10	10	10	10	10	10
15	10	5	12	8	10	10



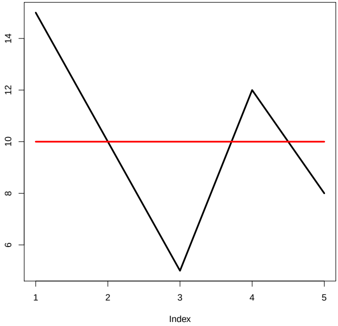
- Variance :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

- série 1 : $S_n^2 = 0$, série 2 $S_n^2 = \frac{1}{5}(5^2 + 0^2 + ...) = 11.6.$
- Conclusion : les observations de la série 2 sont plus dispersées autour de leur moyenne.

- Mesurer la tendance centrale n'est pas suffisant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}$	M
10	10	10	10	10	10	10
15	10	5	12	8	10	10



- Variance :

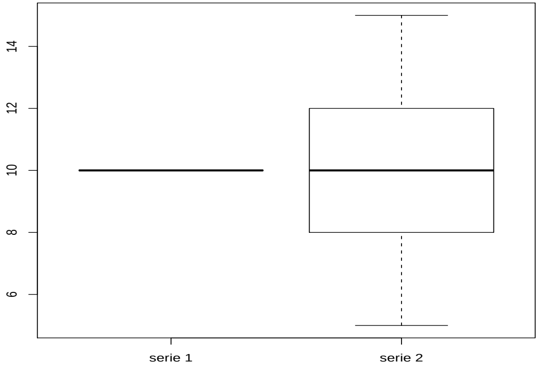
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

- série 1 : $S_n^2 = 0$, série 2 $S_n^2 = \frac{1}{5}(5^2 + 0^2 + ...) = 11.6$.
- Conclusion : les observations de la série 2 sont plus dispersées autour de leur moyenne.

UNIVERSITÉ RENNES 2

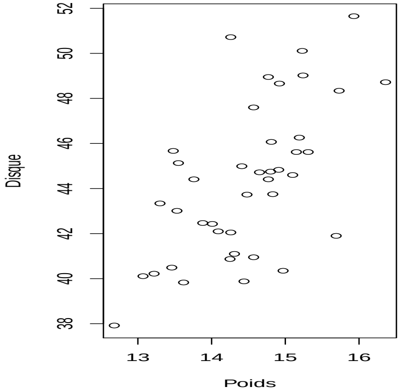
Boxplot

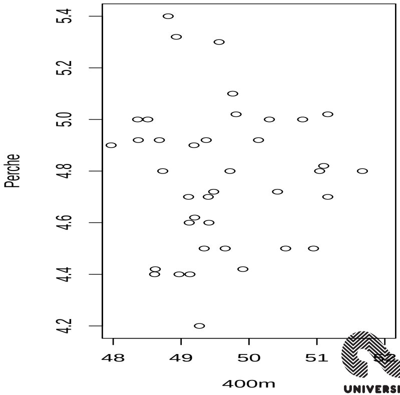
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}$	M
10	10	10	10	10	10	10
15	10	5	12	8	10	10



UNIVERSITÉ RENNES 2

- On observe 2 variables quantitatives X et Y sur un échantillon de n individus. Les observations sont notées $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$.
- Problème : mesurer la relation entre X et Y.
- Exemple :





Mesure d'une relation linéaire

- Définition
  - covariance entre X et Y :

$$\mathbf{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}.$$

  - corrélation entre X et Y :

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

- Propriété
  - $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$ et $|\rho(X,Y)|=1$ si et seulement si il existe a et b tels que $y_i=ax_i+b$.
  - Si $|\rho(X,Y)|\approx 1$ on dit que X et Y sont corrélées et si $|\rho(X,Y)|\approx 0$ on dit qu'elles sont non corrélées.
- Exemple : $\rho(Poids, Disque)=0.62$ et $\rho(400m, perche)=-0.08$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Mesure d'une relation linéaire

- Définition
  - covariance entre X et Y :

$$\mathbf{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}.$$

  - corrélation entre X et Y :

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

- Propriété
  - $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$ et $|\rho(X,Y)|=1$ si et seulement si il existe a et b tels que $y_i=ax_i+b$.
  - Si $|\rho(X,Y)|\approx 1$ on dit que X et Y sont corrélées et si $|\rho(X,Y)|\approx 0$ on dit qu'elles sont non corrélées.
- Exemple : $\rho(Poids, Disque)=0.62$ et $\rho(400m, perche)=-0.08$.

- Lorsque l'on cherche à étudier plus de deux variables simultanément, les choses se compliquent...
- Sur l'exemple du décathlon, on a $n = 41$ individus et $p = 10$ variables.

- Questions :
  - peut-on regrouper certains individus selon leur performance ? On pourrait calculer les $n(n-1)/2 = 820$ distances entre individus... difficile à analyser.
  - peut-on indentifier des groupes de variables (des disciplines pour lesquelles certains individus pourraient être très performants ou non) ? Une idée : utiliser la matrice des corrélations.

- Lorsque l'on cherche à étudier plus de deux variables simultanément, les choses se compliquent...
- Sur l'exemple du décathlon, on a $n = 41$ individus et $p = 10$ variables.
- Questions :
  - peut-on regrouper certains individus selon leur performance ? On pourrait calculer les $n(n-1)/2 = 820$ distances entre individus... difficile à analyser.
  - peut-on indentifier des groupes de variables (des disciplines pour lesquelles certains individus pourraient être très performants ou non) ? Une idée : utiliser la matrice des corrélations.

- Lorsque l'on cherche à étudier plus de deux variables simultanément, les choses se compliquent...
- Sur l'exemple du décathlon, on a $n = 41$ individus et $p = 10$ variables.

- Questions :
  - peut-on regrouper certains individus selon leur performance ? On pourrait calculer les $n(n-1)/2 = 820$ distances entre individus... difficile à analyser.
  - peut-on indentifier des groupes de variables (des disciplines pour lesquelles certains individus pourraient être très performants ou non) ? Une idée : utiliser la matrice des corrélations.

Un exemple

	X100m	Longueur	Poids	Hauteur	X400m	X110mH	Disque	Perche	Javelot	X1500m
X100m	1.00	-0.60	-0.36	-0.25	0.52	0.58	-0.22	-0.08	-0.16	-0.06
Longueur	-0.60	1.00	0.18	0.29	-0.60	-0.51	0.19	0.20	0.12	-0.03
Poids	-0.36	0.18	1.00	0.49	-0.14	-0.25	0.62	0.06	0.37	0.12
Hauteur	-0.25	0.29	0.49	1.00	-0.19	-0.28	0.37	-0.16	0.17	-0.04
X400m	0.52	-0.60	-0.14	-0.19	1.00	0.55	-0.12	-0.08	0.00	0.41
X110mH	0.58	-0.51	-0.25	-0.28	0.55	1.00	-0.33	0.00	0.01	0.04
Disque	-0.22	0.19	0.62	0.37	-0.12	-0.33	1.00	-0.15	0.16	0.26
Perche	-0.08	0.20	0.06	-0.16	-0.08	0.00	-0.15	1.00	-0.03	0.25
Javelot	-0.16	0.12	0.37	0.17	0.00	0.01	0.16	-0.03	1.00	-0.18
X1500m	-0.06	-0.03	0.12	-0.04	0.41	0.04	0.26	0.25	-0.18	1.00

On mesure les corrélations deux à deux mais difficile d'obtenir une information plus globale...

Un exemple

	X100m	Longueur	Poids	Hauteur	X400m	X110mH	Disque	Perche	Javelot	X1500m
X100m	1.00	-0.60	-0.36	-0.25	0.52	0.58	-0.22	-0.08	-0.16	-0.06
Longueur	-0.60	1.00	0.18	0.29	-0.60	-0.51	0.19	0.20	0.12	-0.03
Poids	-0.36	0.18	1.00	0.49	-0.14	-0.25	0.62	0.06	0.37	0.12
Hauteur	-0.25	0.29	0.49	1.00	-0.19	-0.28	0.37	-0.16	0.17	-0.04
X400m	0.52	-0.60	-0.14	-0.19	1.00	0.55	-0.12	-0.08	0.00	0.41
X110mH	0.58	-0.51	-0.25	-0.28	0.55	1.00	-0.33	0.00	0.01	0.04
Disque	-0.22	0.19	0.62	0.37	-0.12	-0.33	1.00	-0.15	0.16	0.26
Perche	-0.08	0.20	0.06	-0.16	-0.08	0.00	-0.15	1.00	-0.03	0.25
Javelot	-0.16	0.12	0.37	0.17	0.00	0.01	0.16	-0.03	1.00	-0.18
X1500m	-0.06	-0.03	0.12	-0.04	0.41	0.04	0.26	0.25	-0.18	1.00

On mesure les corrélations deux à deux mais difficile d'obtenir une information plus globale...

Projecteurs

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.

Définition

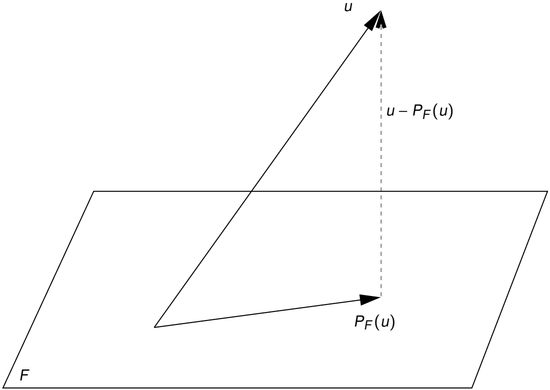
Un projecteur $p : E \to E$ est une application linéaire qui vérifie $p \circ p = p$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Projection orthogonale

P_F est la projection orthogonale sur F si

- $\forall u \in E,\ P_F(u) \in F$;
- $\forall u \in E,\ u - P_F(u) \in F^{\perp}$.



Propriétés

1. Soient $(u, v) \in E^2$. Le projeté orthogonal de u sur $F = \text{vect}(v)$ est donné par

$$P_F(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

2. Soit F un sev de E de dimension p et $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ une base orthogonale de F, alors

$$P_F(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \ldots + \frac{\langle u, v_p\rangle}{\|v_p\|^2} v_p.$$

Soient F et G 2 sev orthogonaux de E. Alors

$$P_{F \bigoplus G} = P_F + P_G.$$

Propriétés

1. Soient $(u, v) \in E^2$. Le projeté orthogonal de u sur $F = \mathrm{vect}(v)$ est donné par

$$P_F(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

2. Soit F un sev de E de dimension p et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ une base orthogonale de F, alors

$$P_F(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_p\rangle}{\|v_p\|^2} v_p.$$

Soient F et G 2 sev orthogonaux de E. Alors

$$P_{F \bigoplus G} = P_F + P_G.$$

Propriétés

1. Soient $(u, v) \in E^2$. Le projeté orthogonal de u sur $F = \mathrm{vect}(v)$ est donné par
$$P_F(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

2. Soit F un sev de E de dimension p et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ une base orthogonale de F, alors
$$P_F(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \ldots + \frac{\langle u, v_p\rangle}{\|v_p\|^2} v_p.$$

   Soient F et G 2 sev orthogonaux de E. Alors
$$P_{F \bigoplus G} = P_F + P_G.$$

Définition

Soit A une matrice $n \times n$.

- $v \in E$ est un vecteur propre de A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$ (λ est appelé valeur propre de A).
- L'ensemble des vecteurs propres de A associé à la valeur propre λ est appelé espace propre E_λ :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Propriété

λ est valeur propre de A si est seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Définition

Soit A une matrice $n \times n$.

- $v \in E$ est un vecteur propre de A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$ (λ est appelé valeur propre de A).
- L'ensemble des vecteurs propres de A associé à la valeur propre λ est appelé espace propre E_λ :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Propriété

λ est valeur propre de A si est seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Diagonalisation

Définition

A est diagonalisable si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P^{-1}DP$.

Propriété

Soit A une matrice admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{k} \dim(E_{\lambda_j}) = n.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

A est diagonalisable si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P^{-1}DP$.

Propriété

Soit A une matrice admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{k} \dim(E_{\lambda_j}) = n.$$

Diagonalisation de matrices semi-définie positive

Propriété

Soit A une matrice symétrique semi-définie positive. Alors

1. A est diagonalisable ;
2. Les valeurs propres de A sont ≥ 0 ;
3. Les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Propriété

Soit X une matrice $n \times p$. Alors

1. la matrice $X'X = \Sigma$ de dimension $p \times p$ est semi-définie positive.
2. la matrice $XX' = A$ de dimension $n \times n$ est semi-définie positive.
3. Σ et A ont les mêmes valeurs propres non nulles.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Diagonalisation de matrices semi-définie positive

Propriété

Soit A une matrice symétrique semi-définie positive. Alors

1. A est diagonalisable ;
2. Les valeurs propres de A sont ≥ 0 ;
3. Les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Propriété

Soit X une matrice $n \times p$. Alors

1. la matrice $X'X = \Sigma$ de dimension $p \times p$ est semi-définie positive.
2. la matrice $XX' = A$ de dimension $n \times n$ est semi-définie positive.
3. Σ et A ont les mêmes valeurs propres non nulles.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Notations

- Tableau des données

$$X = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $e_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ l'individu i et $X_j = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})'$ la variable j.
- $e_i \in \mathbb{R}^p$, la représentation de l'ensemble des individus est un nuage de points dans $\mathbb{R}^p$, appelé nuage des individus, $\mathcal{N}$.
- $X_j \in \mathbb{R}^n$, la représentation de l'ensemble des variables est un nuage de points dans $\mathbb{R}^n$, appelé nuage des variables, $\mathcal{M}$.

Si l'œil était capable de visualiser dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, il n'y aurait pas de problème...

Notations

- Tableau des données

$$X = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $e_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ l'individu i et $X_j = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})'$ la variable j.
- $e_i \in \mathbb{R}^p$, la représentation de l'ensemble des individus est un nuage de points dans $\mathbb{R}^p$, appelé nuage des individus, $\mathcal{N}$.
- $X_j \in \mathbb{R}^n$, la représentation de l'ensemble des variables est un nuage de points dans $\mathbb{R}^n$, appelé nuage des variables, $\mathcal{M}$.

Si l'œil était capable de visualiser dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, il n'y aurait pas de problème...

Notations

- Tableau des données

$$X = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $e_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ l'individu i et $X_j = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})'$ la variable j.
- $e_i \in \mathbb{R}^p$, la représentation de l'ensemble des individus est un nuage de points dans $\mathbb{R}^p$, appelé nuage des individus, $\mathcal{N}$.
- $X_j \in \mathbb{R}^n$, la représentation de l'ensemble des variables est un nuage de points dans $\mathbb{R}^n$, appelé nuage des variables, $\mathcal{M}$.

Si l'œil était capable de visualiser dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, il n'y aurait pas de problème...

Notations

- Tableau des données

$$X = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $e_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p})'$ l'individu i et $X_j = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j})'$ la variable j.
- $e_i \in \mathbb{R}^p$, la représentation de l'ensemble des individus est un nuage de points dans $\mathbb{R}^p$, appelé nuage des individus, $\mathcal{N}$.
- $X_j \in \mathbb{R}^n$, la représentation de l'ensemble des variables est un nuage de points dans $\mathbb{R}^n$, appelé nuage des variables, $\mathcal{M}$.

Si l'œil était capable de visualiser dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, il n'y aurait pas de problème...

Objectifs

Déterminer un sous-espace de dimension réduite qui soit "compréhensible" par l'œil sur lequel projeter le nuage.

Un exemple “jouet”

Ménage	Revenu	nb pièces	nb enfants
A	10 000	1	1
B	10 000	2	1
C	10 000	2	3
D	10 000	1	3
E	70 000	2	2

Objectifs

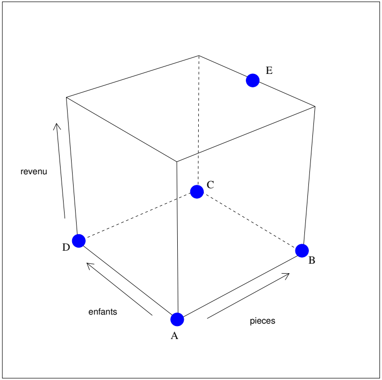
Déterminer un sous-espace de dimension réduite qui soit "compréhensible" par l'œil sur lequel projeter le nuage.

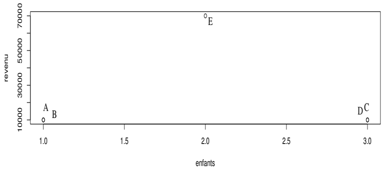
Un exemple “jouet”

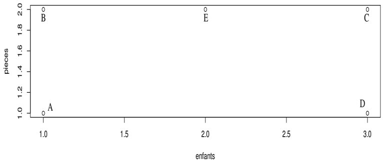
Ménage	Revenu	nb pièces	nb enfants
A	10 000	1	1
B	10 000	2	1
C	10 000	2	3
D	10 000	1	3
E	70 000	2	2

UNIVERSITÉ RENNES 2

Diverses représentations

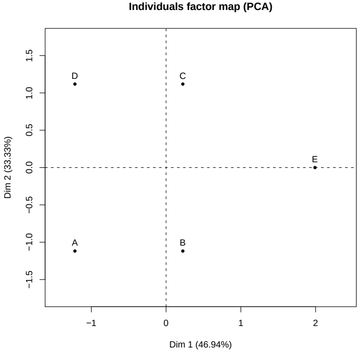


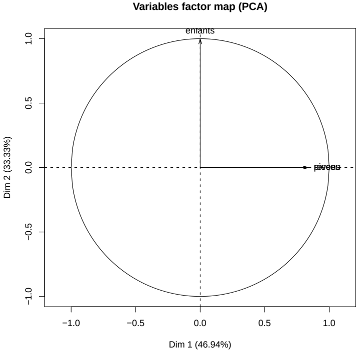




Fonction **PCA**

On obtient sur R avec la fonction **PCA** : res <- **PCA**(D)





Le plan de projection est ici défini par $\mathcal{P} = \text{vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = X_1 + X_2$ et $u_2 = X_3$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Notations

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^p$ muni de la distance euclidienne :

- $< e_i, e_j >= \sum_{k=1}^p x_{i,k} x_{j,k}$
- $\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^p e_{i,k}^2$
- $d(e_i, e_j)^2 = \sum_{k=1}^p (x_{i,k} - x_{j,k})^2 = \|e_i - e_j\|^2$

Centrage des données :

- Soit $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_p)'$ le centre de gravité du nuage des individus.
- Pour simplifier l'écriture de la méthode, on centre le nuage :

$$e_i^c = \begin{pmatrix} x_{i,1} - \bar{X}_1 \\ \vdots \\ x_{i,p} - \bar{X}_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^c = \{e_1^c, \ldots, e_n^c\}.$$

Notations

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^p$ muni de la distance euclidienne :

- $< e_i, e_j >= \sum_{k=1}^p x_{i,k} x_{j,k}$
- $\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^p e_{i,k}^2$
- $d(e_i, e_j)^2 = \sum_{k=1}^p (x_{i,k} - x_{j,k})^2 = \|e_i - e_j\|^2$

Centrage des données :

- Soit $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)'$ le centre de gravité du nuage des individus.
- Pour simplifier l'écriture de la méthode, on centre le nuage :

$$e_i^c = \begin{pmatrix} x_{i,1} - \bar{X}_1 \\ \vdots \\ x_{i,p} - \bar{X}_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^c = \{e_1^c, \dots, e_n^c\}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Idée

Chercher à projeter les observations dans un sous-espace $\mathcal{F}$ visible à l'œil qui "restitue au mieux" l'information contenue dans le tableau.

L'inertie

- On appelle inertie totale du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(e_i, G)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i - G\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i^c\|^2 = I(\mathcal{N}^c).$$

- On appelle inertie portée par un sous espace $\mathcal{F}$ du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|P_{\mathcal{F}}(e_i^c)\|^2,$$

où $P_{\mathcal{F}}(.)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Idée

Chercher à projeter les observations dans un sous-espace $\mathcal{F}$ visible à l'œil qui "restitue au mieux" l'information contenue dans le tableau.

L'inertie

- On appelle inertie totale du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(e_i, G)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i - G\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i^c\|^2 = I(\mathcal{N}^c).$$

- On appelle inertie portée par un sous espace $\mathcal{F}$ du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|P_{\mathcal{F}}(e_i^c)\|^2,$$

où $P_{\mathcal{F}}(.)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$.

Idée

Chercher à projeter les observations dans un sous-espace $\mathcal{F}$ visible à l'œil qui "restitue au mieux" l'information contenue dans le tableau.

L'inertie

- On appelle inertie totale du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(e_i, G)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i - G\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|e_i^c\|^2 = I(\mathcal{N}^c).$$

- On appelle inertie portée par un sous espace $\mathcal{F}$ du nuage de points $\mathcal{N}$

$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|P_{\mathcal{F}}(e_i^c)\|^2,$$

où $P_{\mathcal{F}}(.)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$.

Une remarque importante

- L'ACP permet de prendre en compte une pondération différente des individus : p_i poids de l'individu i tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
- L'inertie est alors définie par $I(\mathcal{N}) = \sum_{i=1}^{n} p_i d(e_i, G)^2$.
- Dans ce cours, on supposera que tous les individus ont le même poids : $p_i = 1/n$, $i = 1, \dots, n$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Il est facile de voir que $I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \leq I(\mathcal{N})$: projeter fait perdre de l'inertie.

Objectif

Trouver le sous espace $\mathcal{F}$ qui minimise cette perte d'inertie, ou encore trouver le sous espace $\mathcal{F}$ tel que

$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \quad \text{soit maximale.}$$

Un "léger" problème

1. Les variables ne sont généralement pas à la même échelle.
2. L'inertie est donc généralement "portée" par un sous groupe de variables.
3. Sur l'exemple, la variable `revenu` porte à elle seule la quasi totalité de l'inertie...

UNIVERSITÉ RENNES 2

Il est facile de voir que $I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \leq I(\mathcal{N})$: projeter fait perdre de l'inertie.

Objectif

Trouver le sous espace $\mathcal{F}$ qui minimise cette perte d'inertie, ou encore trouver le sous espace $\mathcal{F}$ tel que

$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \quad \text{soit maximale.}$$

Un "léger" problème

1. Les variables ne sont généralement pas à la même échelle.
2. L'inertie est donc généralement "portée" par un sous groupe de variables.
3. Sur l'exemple, la variable `revenu` porte à elle seule la quasi totalité de l'inertie...

UNIVERSITÉ RENNES 2

Il est facile de voir que $I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \leq I(\mathcal{N})$: projeter fait perdre de l'inertie.

Objectif

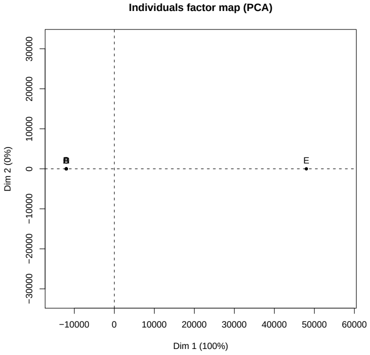
Trouver le sous espace $\mathcal{F}$ qui minimise cette perte d'inertie, ou encore trouver le sous espace $\mathcal{F}$ tel que

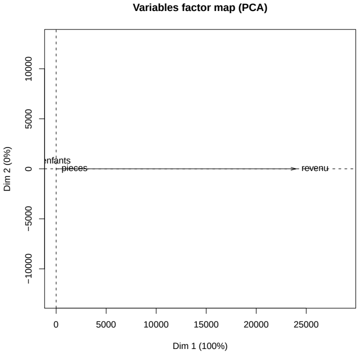
$$I_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \quad \text{soit maximale.}$$

Un "léger" problème

1. Les variables ne sont généralement pas à la même échelle.
2. L'inertie est donc généralement "portée" par un sous groupe de variables.
3. Sur l'exemple, la variable `revenu` porte à elle seule la quasi totalité de l'inertie...

UNIVERSITÉ RENNES 2

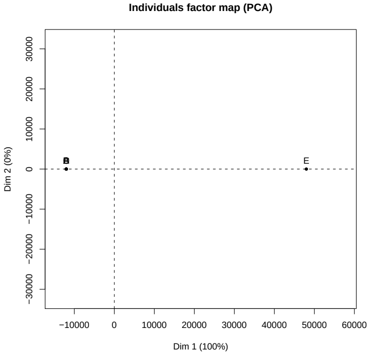


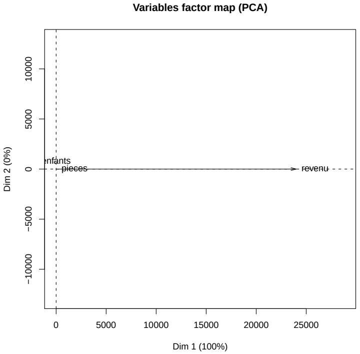


Pour pallier à cette difficulté, on réduit les données initiales :

$$X = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \dots & \tilde{x}_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{\sigma_j} \quad \text{et} \quad \sigma_j = \sigma(X_j).$$

Avec un léger abus, on note $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$.





Pour pallier à cette difficulté, on réduit les données initiales :

$$X = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \dots & \tilde{x}_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \dots & \tilde{x}_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{\sigma_j} \quad \text{et} \quad \sigma_j = \sigma(X_j).$$

Avec un léger abus, on note $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$.

- On rappelle que

	revenu	pieces	enfants
A	10000	1	1
B	10000	2	1
C	10000	2	3
D	10000	1	3
E	70000	2	2
μ	22000.0	1.6	2.0
σ	24 000	0.4898979	0.8944272

- On obtient après centrage et réduction

	revenu	pieces	enfants
A	-0.5	-1.2247449	-1.118034
B	-0.5	0.8164966	-1.118034
C	-0.5	0.8164966	1.118034
D	-0.5	-1.2247449	1.118034
E	2.0	0.8164966	0.000000
μ	0	0	0
σ	1	1	1

Centrage et réduction

- On rappelle que

	revenu	pieces	enfants
A	10000	1	1
B	10000	2	1
C	10000	2	3
D	10000	1	3
E	70000	2	2
μ	22000.0	1.6	2.0
σ	24 000	0.4898979	0.8944272

- On obtient après centrage et réduction

	revenu	pieces	enfants
A	-0.5	-1.2247449	-1.118034
B	-0.5	0.8164966	-1.118034
C	-0.5	0.8164966	1.118034
D	-0.5	-1.2247449	1.118034
E	2.0	0.8164966	0.000000
μ	0	0	0
σ	1	1	1

"Meilleur" sous-espace de dimension 1

Il s'agit de chercher une droite vectorielle Δ_1 dirigée par un vecteur unitaire $u_1 \in \mathbb{R}^p$ telle que $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ soit maximale.

Propriété

- $I_{\Delta_1}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n < e_i, u_1 >^2 = \frac{1}{n} C_1' C_1$ où

$$C_1 = (< e_1, u_1 >, \dots, < e_n, u_1 >)' = X u_1.$$

Le problème mathématique

Chercher u_1 unitaire qui maximise $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{maximiser } \frac{1}{n} u_1' X' X u_1 \text{ sous la contrainte } \|u_1\| = 1.$$

"Meilleur" sous-espace de dimension 1

Il s'agit de chercher une droite vectorielle Δ_1 dirigée par un vecteur unitaire $u_1 \in \mathbb{R}^p$ telle que $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ soit maximale.

Propriété

- $I_{\Delta_1}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n < e_i, u_1 >^2 = \frac{1}{n}C_1'C_1$ où

$$C_1 = (< e_1, u_1 >, \dots, < e_n, u_1 >)' = Xu_1.$$

Le problème mathématique

Chercher u_1 unitaire qui maximise $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{maximiser } \frac{1}{n}u_1'X'Xu_1 \text{ sous la contrainte } \|u_1\| = 1.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

"Meilleur" sous-espace de dimension 1

Il s'agit de chercher une droite vectorielle Δ_1 dirigée par un vecteur unitaire $u_1 \in \mathbb{R}^p$ telle que $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ soit maximale.

Propriété

- $I_{\Delta_1}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n < e_i, u_1 >^2 = \frac{1}{n} C_1' C_1$ où

$$C_1 = (< e_1, u_1 >, \dots, < e_n, u_1 >)' = X u_1.$$

Le problème mathématique

Chercher u_1 unitaire qui maximise $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{maximiser } \frac{1}{n} u_1' X' X u_1 \text{ sous la contrainte } \|u_1\| = 1.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Propriété

Un vecteur propre unitaire u_1 rendant l'inertie $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ maximale est un vecteur propre normé associé à la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Remarques

- La matrice d'inertie $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$ étant symétrique et définie positive, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- u_1 est appelé premier axe factoriel.

Propriété

Un vecteur propre unitaire u_1 rendant l'inertie $I_{\Delta_1}(\mathcal{N})$ maximale est un vecteur propre normé associé à la plus grande valeur propre λ_1 de la matrice $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Remarques

- La matrice d'inertie $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$ étant symétrique et définie positive, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- u_1 est appelé premier axe factoriel.

Exemple

Sur l'exemple "jouet", on a

$$\frac{1}{n}X'X = \begin{pmatrix} 1.0000000 & 0.4082483 & 0.000000e+00 \\ 0.4082483 & 1.0000000 & 3.144186e-18 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.000000e+00 \end{pmatrix}$$

D'où

```
$values
[1] 1.4082483 1.0000000 0.5917517

$vectors
          [,1] [,2]       [,3]
[1,] 0.7071068    0  0.7071068
[2,] 0.7071068    0 -0.7071068
[3,] 0.0000000    1  0.0000000
```

On obtient les coordonnées des individus sur le premier axe

```
> X%*%u1 #coordonnées des individus sur les axes
        [,1]
A -1.2195788
B  0.2237969
C  0.2237969
D -1.2195788
E  1.9915638
```

Exemple

Sur l'exemple "jouet", on a

$$\frac{1}{n}X'X = \begin{pmatrix} 1.0000000 & 0.4082483 & 0.000000e+00 \\ 0.4082483 & 1.0000000 & 3.144186e-18 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.000000e+00 \end{pmatrix}$$

D'où

```
$values
[1] 1.4082483 1.0000000 0.5917517

$vectors
          [,1] [,2]       [,3]
[1,] 0.7071068    0  0.7071068
[2,] 0.7071068    0 -0.7071068
[3,] 0.0000000    1  0.0000000
```

On obtient les coordonnées des individus sur le premier axe

```
> X%*%u1 #coordonnées des individus sur les axes
        [,1]
A -1.2195788
B  0.2237969
C  0.2237969
D -1.2195788
E  1.9915638
```

Second axe : première approche

Problème

Trouver une droite vectorielle Δ_2 dirigée par un vecteur normé u_2 telle que

$$\begin{cases} I_{\Delta_2}(\mathcal{N}) = u_2'\Sigma u_2 \text{ maximale} \\ \|u_2\|^2 = u_2' u_2 = 1 \\ < u_2, u_1 >= u_2' u_1 = 0 \end{cases}$$

Solution

Un vecteur unitaire u_2 solution du problème précédent est un vecteur propre normé associé à la deuxième plus grande valeur propre λ_2 de la matrice $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Question

Le plan vect(u_1, u_2) est il le meilleur sous espace de dimension 2 en terme de maximisation d'inertie projetée ?

Réponse

La réponse est oui ! On déduit ainsi qu'un sous-espace de dimension $q < p$ qui maximise l'inertie projetée est donné par vect$(u_1, \dots, u_q)$ où u_j est un vecteur normé associé à la $j^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre λ_j de $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Conclusion : chercher les axes factoriels revient à diagonaliser $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Question

Le plan vect(u_1, u_2) est il le meilleur sous espace de dimension 2 en terme de maximisation d'inertie projetée ?

Réponse

La réponse est oui ! On déduit ainsi qu'un sous-espace de dimension $q < p$ qui maximise l'inertie projetée est donné par vect$(u_1, \dots, u_q)$ où u_j est un vecteur normé associé à la $j^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre λ_j de $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Conclusion : chercher les axes factoriels revient à diagonaliser $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Question

Le plan vect(u_1, u_2) est il le meilleur sous espace de dimension 2 en terme de maximisation d'inertie projetée ?

Réponse

La réponse est oui ! On déduit ainsi qu'un sous-espace de dimension $q < p$ qui maximise l'inertie projetée est donné par vect$(u_1, \dots, u_q)$ où u_j est un vecteur normé associé à la $j^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre λ_j de $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

Conclusion : chercher les axes factoriels revient à diagonaliser $\Sigma = \frac{1}{n}X'X$.

ACP $\approx$ changement de base

Base canonique	Base $\{u_1,\ldots,u_p\}$
$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \ldots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$	$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \ldots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

1. $C_j = Xu_j = \sum_{k=1}^{p} u_{kj}X_k$
2. C_j centrée et $\mathbf{V}(C_j) = \frac{1}{n}\|C_j\|^2 = \lambda_j = I_{\Delta_j}(\mathcal{N})$.
3. $\rho(C_j, C_k) = 0$ pour $k \neq j$.

Conclusion

L'ACP normée remplace les variables d'origines X_j par de nouvelles variables C_j appelées composantes principales, de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

ACP $\approx$ changement de base

Base canonique	Base $\{u_1, \dots, u_p\}$
$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$	$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

1. $C_j = Xu_j = \sum_{k=1}^p u_{kj} X_k$
2. C_j centrée et $\mathbf{V}(C_j) = \frac{1}{n}\|C_j\|^2 = \lambda_j = I_{\Delta_j}(\mathcal{N})$.
3. $\rho(C_j, C_k) = 0$ pour $k \neq j$.

Conclusion

L'ACP normée remplace les variables d'origines X_j par de nouvelles variables C_j appelées composantes principales, de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

ACP $\approx$ changement de base

Base canonique	Base $\{u_1, \dots, u_p\}$
$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$	$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

1. $C_j = Xu_j = \sum_{k=1}^{p} u_{kj} X_k$
2. C_j centrée et $\mathbf{V}(C_j) = \frac{1}{n} \|C_j\|^2 = \lambda_j = I_{\Delta_j}(\mathcal{N})$.
3. $\rho(C_j, C_k) = 0$ pour $k \neq j$.

Conclusion

L'ACP normée remplace les variables d'origines X_j par de nouvelles variables C_j appelées composantes principales, de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

ACP $\approx$ changement de base

Base canonique	Base $\{u_1, \dots, u_p\}$
$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$	$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

1. $C_j = Xu_j = \sum_{k=1}^{p} u_{kj} X_k$
2. C_j centrée et $\mathbf{V}(C_j) = \frac{1}{n}\|C_j\|^2 = \lambda_j = I_{\Delta_j}(\mathcal{N})$.
3. $\rho(C_j, C_k) = 0$ pour $k \neq j$.

Conclusion

L'ACP normée remplace les variables d'origines X_j par de nouvelles variables C_j appelées composantes principales, de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

ACP $\approx$ changement de base

Base canonique	Base $\{u_1, \dots, u_p\}$
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X_1 & \dots & X_p \end{array} \\ X = & \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$	$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_p \end{array} \\ X = & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété

1. $C_j = Xu_j = \sum_{k=1}^{p} u_{kj} X_k$
2. C_j centrée et $\mathbf{V}(C_j) = \frac{1}{n}\|C_j\|^2 = \lambda_j = I_{\Delta_j}(\mathcal{N})$.
3. $\rho(C_j, C_k) = 0$ pour $k \neq j$.

Conclusion

L'ACP normée remplace les variables d'origines X_j par de nouvelles variables C_j appelées composantes principales, de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui s'expriment comme combinaison linéaire des variables d'origine.

Premier bilan

Calculer les axes factoriels n'est pas difficile. Il reste néanmoins plusieurs problèmes à régler pour mener l'analyse :

1. Comment choisir le sous-espace ? (Ou encore, combien d'axes factoriels doit-on retenir ?)
2. Comment mesurer la qualité de représentation d'un individu sur le sous-espace choisi ?
3. Comment interpréter les axes ?

Premier bilan

Calculer les axes factoriels n'est pas difficile. Il reste néanmoins plusieurs problèmes à régler pour mener l'analyse :

1. Comment choisir le sous-espace ? (Ou encore, combien d'axes factoriels doit-on retenir ?)
2. Comment mesurer la qualité de représentation d'un individu sur le sous-espace choisi ?
3. Comment interpréter les axes ?

Premier bilan

Calculer les axes factoriels n'est pas difficile. Il reste néanmoins plusieurs problèmes à régler pour mener l'analyse :

1. Comment choisir le sous-espace ? (Ou encore, combien d'axes factoriels doit-on retenir ?)
2. Comment mesurer la qualité de représentation d'un individu sur le sous-espace choisi ?
3. Comment interpréter les axes ?

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
2. $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \lambda_j$.
3. L'inertie est additive : si on note $\mathcal{F}_k$ le sous espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les k premiers vecteurs propres associés aux k plus grandes valeurs propres de Σ, alors

$$I_{\mathcal{F}_k}(\mathcal{N}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Définitions

- La **contribution à l'inertie** de l'axe Δ_k est λ_k.
- La **contribution relative à l'inertie** de l'axe Δ_k est $\lambda_k / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
- La **contribution relative à l'inertie** du plan (Δ_j, Δ_k) est $(\lambda_j + \lambda_k) / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
2. $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \lambda_j$.
3. L'inertie est additive : si on note $\mathcal{F}_k$ le sous espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les k premiers vecteurs propres associés aux k plus grandes valeurs propres de Σ, alors

$$I_{\mathcal{F}_k}(\mathcal{N}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Définitions

- La **contribution à l'inertie** de l'axe Δ_k est λ_k.
- La **contribution relative à l'inertie** de l'axe Δ_k est $\lambda_k / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
- La **contribution relative à l'inertie** du plan (Δ_j, Δ_k) est $(\lambda_j + \lambda_k)/ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
2. $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \lambda_j$.
3. L'inertie est additive : si on note $\mathcal{F}_k$ le sous espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les k premiers vecteurs propres associés aux k plus grandes valeurs propres de Σ, alors
$$I_{\mathcal{F}_k}(\mathcal{N}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Définitions

- La **contribution à l'inertie** de l'axe Δ_k est λ_k.
- La **contribution relative à l'inertie** de l'axe Δ_k est $\lambda_k / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
- La **contribution relative à l'inertie** du plan (Δ_j, Δ_k) est $(\lambda_j + \lambda_k)/\sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
2. $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \lambda_j$.
3. L'inertie est additive : si on note $\mathcal{F}_k$ le sous espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les k premiers vecteurs propres associés aux k plus grandes valeurs propres de Σ, alors

$$I_{\mathcal{F}_k}(\mathcal{N}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Définitions

- La **contribution à l'inertie** de l'axe Δ_k est λ_k.
- La **contribution relative à l'inertie** de l'axe Δ_k est $\lambda_k / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.
- La **contribution relative à l'inertie** du plan (Δ_j, Δ_k) est $(\lambda_j + \lambda_k) / \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$.

Choix du nombre d'axes

Hélas

Il n'existe pas de méthodes "universelles" permettant de choisir le nombre d'axes.

Les critères sont le plus souvent empiriques :

- Pourcentage d'inertie reconstitué par le sous-espace sélectionné.
- Etudier la décroissance des valeurs propres (critère dit "du coude").

Choix du nombre d'axes

Hélas

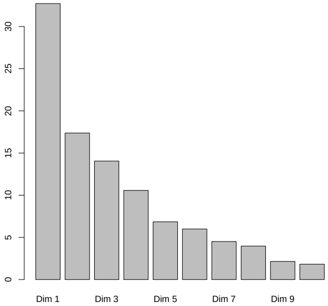
Il n'existe pas de méthodes "universelles" permettant de choisir le nombre d'axes.

Les critères sont le plus souvent empiriques :

- Pourcentage d'inertie reconstitué par le sous-espace sélectionné.
- Etudier la décroissance des valeurs propres (critère dit "du coude").

UNIVERSITÉ RENNES 2

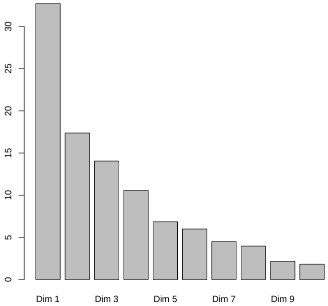
Exemple du décathlon



	eigenvalue	percentage of variance	cumulative percentage of variance
comp 1	3.27	32.72	32.72
comp 2	1.74	17.37	50.09
comp 3	1.40	14.05	64.14
comp 4	1.06	10.57	74.71
comp 5	0.68	6.85	81.56
comp 6	0.60	5.99	87.55
comp 7	0.45	4.51	92.06
comp 8	0.40	3.97	96.03
comp 9	0.21	2.15	98.18
comp 10	0.18	1.82	100.00

Il semble que retenir 4 axes puisse être un choix intéressant.

Exemple du décathlon



	eigenvalue	percentage of variance	cumulative percentage of variance
comp 1	3.27	32.72	32.72
comp 2	1.74	17.37	50.09
comp 3	1.40	14.05	64.14
comp 4	1.06	10.57	74.71
comp 5	0.68	6.85	81.56
comp 6	0.60	5.99	87.55
comp 7	0.45	4.51	92.06
comp 8	0.40	3.97	96.03
comp 9	0.21	2.15	98.18
comp 10	0.18	1.82	100.00

Il semble que retenir 4 axes puisse être un choix intéressant.

Questions

1. Quels individus ont le plus contribué à la formation des axes factoriels ?
2. Quels individus sont bien représentés par les axes factoriels ?

Solutions

1. Comme $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n} C_j' C_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2 = \lambda_j$, on mesure la contribution de l'individu i à l'axe j par
$$CR_j(i) = \frac{c_{ij}^2}{n\lambda_j}.$$
2. Un individu e_i sera bien représenté par un axe Δ_j si il est "proche" de son projeté sur Δ_j, ou encore si le cosinus de l'angle $\theta_{ij} = (\widehat{e_i, u_j})$ est proche de 1 ou -1.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Questions

1. Quels individus ont le plus contribué à la formation des axes factoriels ?
2. Quels individus sont bien représentés par les axes factoriels ?

Solutions

1. Comme $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n} C_j' C_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2 = \lambda_j$, on mesure la contribution de l'individu i à l'axe j par
$$CR_j(i) = \frac{c_{ij}^2}{n\lambda_j}.$$
2. Un individu e_i sera bien représenté par un axe Δ_j si il est "proche" de son projeté sur Δ_j, ou encore si le cosinus de l'angle $\theta_{ij} = \widehat{(e_i, u_j)}$ est proche de 1 ou -1.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Questions

1. Quels individus ont le plus contribué à la formation des axes factoriels ?
2. Quels individus sont bien représentés par les axes factoriels ?

Solutions

1. Comme $I_{\Delta_j}(\mathcal{N}) = \frac{1}{n} C_j' C_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2 = \lambda_j$, on mesure la contribution de l'individu i à l'axe j par
$$CR_j(i) = \frac{c_{ij}^2}{n\lambda_j}.$$
2. Un individu e_i sera bien représenté par un axe Δ_j si il est "proche" de son projeté sur Δ_j, ou encore si le cosinus de l'angle $\theta_{ij} = (\widehat{e_i, u_j})$ est proche de 1 ou -1.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Solutions (suite)

La qualité de représentation de l'individu e_i sur l'axe u_j est ainsi mesurée par

$$\mathrm{qlt}_j(i) = \cos^2\theta_{ij} = \frac{\|P_{\Delta_j}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

De même la qualité de représentation de e_i sur le plan $\mathcal{F} = (\Delta_j, \Delta_k)$ est mesurée par

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{\|P_{\mathcal{F}}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

Propriétés

Le cosinus carré étant additif sur des sous-espaces orthogonaux, on déduit

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{\|P_{\Delta_j}(e_i)\|^2 + \|P_{\Delta_k}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Solutions (suite)

La qualité de représentation de l'individu e_i sur l'axe u_j est ainsi mesurée par

$$\mathrm{qlt}_j(i) = \cos^2\theta_{ij} = \frac{\|P_{\Delta_j}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

De même la qualité de représentation de e_i sur le plan $\mathcal{F} = (\Delta_j, \Delta_k)$ est mesurée par

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{\|P_{\mathcal{F}}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

Propriétés

Le cosinus carré étant additif sur des sous-espaces orthogonaux, on déduit

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{\|P_{\Delta_j}(e_i)\|^2 + \|P_{\Delta_k}(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Solutions (suite)

La qualité de représentation de l'individu e_i sur l'axe u_j est ainsi mesurée par

$$\mathrm{qlt}_j(i) = \cos^2\theta_{ij} = \frac{||P_{\Delta_j}(e_i)||^2}{||e_i||^2}.$$

De même la qualité de représentation de e_i sur le plan $\mathcal{F} = (\Delta_j, \Delta_k)$ est mesurée par

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{||P_{\mathcal{F}}(e_i)||^2}{||e_i||^2}.$$

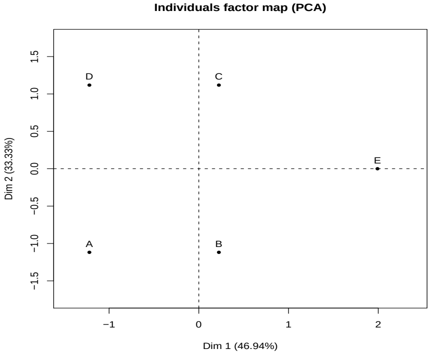
Propriétés

Le cosinus carré étant additif sur des sous-espaces orthogonaux, on déduit

$$\mathrm{qlt}_{\mathcal{F}}(i) = \frac{||P_{\Delta_j}(e_i)||^2 + ||P_{\Delta_k}(e_i)||^2}{||e_i||^2}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

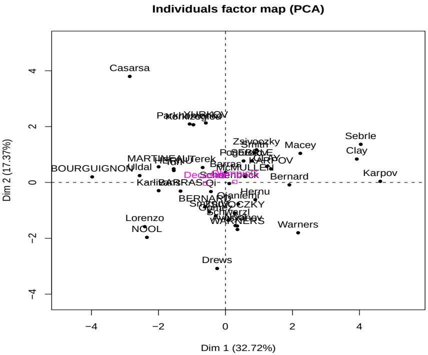
Exemple




```
> res$ind$contrib
       Dim.1        Dim.2     Dim.3
A 21.1237244 2.500000e+01  8.876276
B  0.7113098 2.500000e+01 29.288690
C  0.7113098 2.500000e+01 29.288690
D 21.1237244 2.500000e+01  8.876276
E 56.3299316 3.081488e-31 23.670068

> res$ind$cos2
       Dim.1        Dim.2      Dim.3
A 0.49579081 4.166667e-01 0.08754252
B 0.02311617 5.769231e-01 0.39996075
C 0.02311617 5.769231e-01 0.39996075
D 0.49579081 4.166667e-01 0.08754252
E 0.84992711 3.301594e-33 0.15007289
```

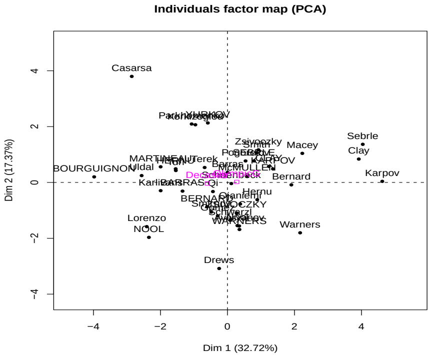
Exemple




```
> res.pca$ind$contrib[1:5,1:2]
             Dim.1       Dim.2
Sebrle  12.157506 2.619234357
Clay    11.451090 0.983545343
Karpov  15.910981 0.002245949
Macey    3.718536 1.523786399
Warners  3.505038 4.565322740

> res.pca$ind$cos2[1:5,1:2]
            Dim.1        Dim.2
Sebrle  0.6954102 7.954314e-02
Clay    0.7112052 3.243204e-02
Karpov  0.8517553 6.383365e-05
Macey   0.4230486 9.203950e-02
Warners 0.5299437 3.664716e-01
```

Comment interpréter les positions des individus ?




```
> res.pca$ind$contrib[1:5,1:2]
            Dim.1       Dim.2
Sebrle  12.157506 2.619234357
Clay    11.451090 0.983545343
Karpov  15.910981 0.002245949
Macey    3.718536 1.523786399
Warners  3.505038 4.565322740

> res.pca$ind$cos2[1:5,1:2]
            Dim.1        Dim.2
Sebrle  0.6954102 7.954314e-02
Clay    0.7112052 3.243204e-02
Karpov  0.8517553 6.383365e-05
Macey   0.4230486 9.203950e-02
Warners 0.5299437 3.664716e-01
```

Comment interpréter les positions des individus ?

L'analyse duale

- On s'intéresse maintenant au nuage des variables $\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_j \in \mathbb{R}^n$.
- Pour prendre en compte les poids des individus, on munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique $P = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$ (on mène l'analyse avec $p_i = 1/n$)

Conséquence

1. $\|X_j\|_P = 1$ et $cos(X_j, X_k) = \rho(X_j, X_k)$.
2. Les variables X_j se trouvent sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. La projection des X_j sur des plans passant par l'origine se trouveront à l'intérieur du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (que nous appellerons cercle des corrélations).

On souhaite transposer l'analyse du nuage des individus à celui des variables (on parle **d'analyse duale**).

L'analyse duale

- On s'intéresse maintenant au nuage des variables $\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_j \in \mathbb{R}^n$.
- Pour prendre en compte les poids des individus, on munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique $P = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$ (on mène l'analyse avec $p_i = 1/n$)

Conséquence

1. $||X_j||_P = 1$ et $cos(X_j, X_k) = \rho(X_j, X_k)$.
2. Les variables X_j se trouvent sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. La projection des X_j sur des plans passant par l'origine se trouveront à l'intérieur du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (que nous appellerons cercle des corrélations).

On souhaite transposer l'analyse du nuage des individus à celui des variables (on parle **d'analyse duale**).

L'analyse duale

- On s'intéresse maintenant au nuage des variables $\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_j \in \mathbb{R}^n$.
- Pour prendre en compte les poids des individus, on munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique $P = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$ (on mène l'analyse avec $p_i = 1/n$)

Conséquence

1. $\|X_j\|_P = 1$ et $cos(X_j, X_k) = \rho(X_j, X_k)$.
2. Les variables X_j se trouvent sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. La projection des X_j sur des plans passant par l'origine se trouveront à l'intérieur du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (que nous appellerons cercle des corrélations).

On souhaite transposer l'analyse du nuage des individus à celui des variables (on parle **d'analyse duale**).

UNIVERSITÉ RENNES 2

L'analyse duale

- On s'intéresse maintenant au nuage des variables $\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_j \in \mathbb{R}^n$.
- Pour prendre en compte les poids des individus, on munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique $P = \mathrm{diag}(p_1, \dots, p_n)$ (on mène l'analyse avec $p_i = 1/n$)

Conséquence

1. $\|X_j\|_P = 1$ et $cos(X_j, X_k) = \rho(X_j, X_k)$.
2. Les variables X_j se trouvent sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. La projection des X_j sur des plans passant par l'origine se trouveront à l'intérieur du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (que nous appellerons cercle des corrélations).

On souhaite transposer l'analyse du nuage des individus à celui des variables (on parle **d'analyse duale**).

UNIVERSITÉ RENNES 2

Bonheur...

- Les axes factoriels de $\mathbb{R}^n$ (ceux du nuage des variables) se déduisent de ceux de $\mathbb{R}^p$ (ceux du nuage des individus).
- Les taux d'inerties sont identiques pour des axes du même rang dans les deux analyses.

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = I(\mathcal{M}) = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{n}X'X\right) = p$, les deux dernières égalités viennent du fait que la matrice des données est centrée-réduite.
2. Chercher un vecteur v_1 de $\mathbb{R}^n$ unitaire qui maximise $I_{\mathrm{vect}\, v_1}(\mathcal{M})$ revient à résoudre le problème

$$\text{maximiser } \frac{1}{n}v_1'XX'v_1 \text{ sous la contrainte } \|v_1\|_P = 1$$

3. La solution est donnée par un vecteur propre normé de $\frac{1}{n}XX'$ associé à la plus grande valeur propre de $\frac{1}{n}XX'$.

Bonheur...

- Les axes factoriels de $\mathbb{R}^n$ (ceux du nuage des variables) se déduisent de ceux de $\mathbb{R}^p$ (ceux du nuage des individus).
- Les taux d'inerties sont identiques pour des axes du même rang dans les deux analyses.

Propriétés

1. $I(\mathcal{N}) = I(\mathcal{M}) = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{n}X'X\right) = p$, les deux dernières égalités viennent du fait que la matrice des données est centrée-réduite.
2. Chercher un vecteur v_1 de $\mathbb{R}^n$ unitaire qui maximise $I_{\mathrm{vect}\, v_1}(\mathcal{M})$ revient à résoudre le problème

$$\text{maximiser } \frac{1}{n} v_1' XX' v_1 \text{ sous la contrainte } \|v_1\|_P = 1$$

3. La solution est donnée par un vecteur propre normé de $\frac{1}{n}XX'$ associé à la plus grande valeur propre de $\frac{1}{n}XX'$.

Propriétés

- $v_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X u_j$ et $u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X' P v_j$;

- Coordonnées du projeté de X_j projeté $i^{\text{ème}}$ axe :
  1. $d_{ij} = < X_j, v_i >_P \Longrightarrow D_j = X' P v_j$
  2. $D_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X' P C_j$ et $C_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X D_j$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Propriétés

- $v_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X u_j$ et $u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X' P v_j$;
- Coordonnées du projeté de X_j projeté $i^{\text{ème}}$ axe :
  1. $d_{ij} =< X_j, v_i >_P \Longrightarrow D_j = X' P v_j$
  2. $D_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X' P C_j$ et $C_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X D_j$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

PROPRIETE

$$d_{ij} = \rho(X_j, C_i)$$

Conséquence

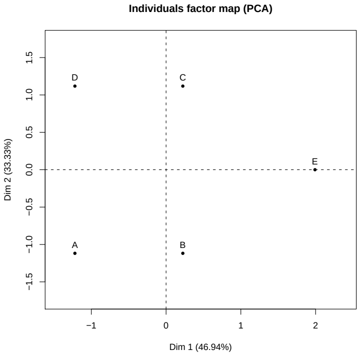
- Si d_{ij} est grand (proche de 1 ce qui signifie que la projection de la variable est proche du cercle des corrélations), cela signifie que :
  - la $j^{\text{ème}}$ variable est fortement corrélée à la $i^{\text{ème}}$ composante principale.
  - les individus qui possèdent une coordonnée élevée sur l'axe i seront parmi ceux possédant une forte valeur de la variable j.
- Cette propriété permet de faire le lien entre la représentation du nuage des variables et celle du nuage des individus sur un plan factoriel.

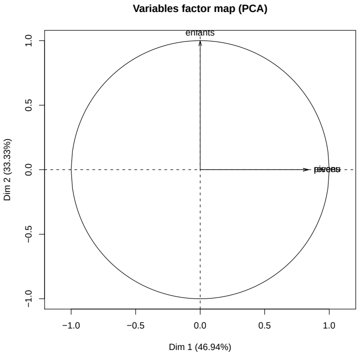
PROPRIETE

$$d_{ij} = \rho(X_j, C_i)$$

Conséquence

- Si d_{ij} est grand (proche de 1 ce qui signifie que la projection de la variable est proche du cercle des corrélations), cela signifie que :
  - la $j^{\text{ème}}$ variable est fortement corrélée à la $i^{\text{ème}}$ composante principale.
  - les individus qui possèdent une coordonnée élevée sur l'axe i seront parmi ceux possédant une forte valeur de la variable j.
- Cette propriété permet de faire le lien entre la représentation du nuage des variables et celle du nuage des individus sur un plan factoriel.

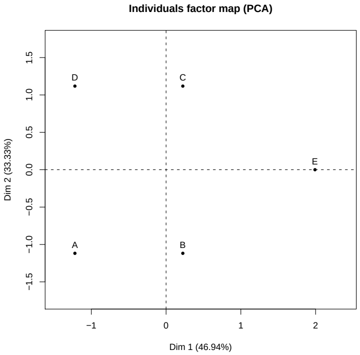


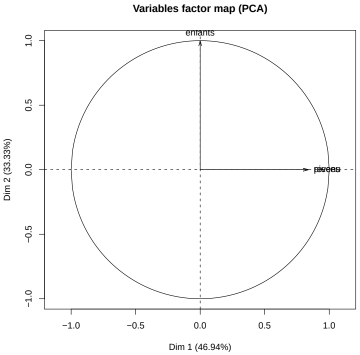


Interprétations

- L'axe 1 oppose les individus possédant des revenus élevés et vivant dans de grands appartements à des individus plus pauvres et vivant dans des appartements plus petits.
- L'axe 2 les grandes familles aux petites.

UNIVERSITÉ RENNES 2





Interprétations

- L'axe 1 oppose les individus possédant des revenus élevés et vivant dans de grands appartements à des individus plus pauvres et vivant dans des appartements plus petits.
- L'axe 2 les grandes familles aux petites.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Contributions et représentation des variables

- Contribution de la variable j à l'axe i : d_{ij}^2/λ_i car

$$I_{v_i}(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{p} (< X_j, v_i >_P)^2 = \sum_{j=1}^{p} d_{ij}^2 = \lambda_i.$$

- Qualité de représentation de la variable X_j sur l'axe i :

$$\cos^2(X_j, v_i) =< X_j, v_i >_p^2 = d_{ij}^2.$$

- Corrélations entre variables : $\rho(X_j, X_k) = \cos(X_j, X_k)$. Donc, sur le cercle des corrélations, deux variable bien représentées
  - proches sont fortement corrélées ;
  - qui s'opposent sont négativement corrélées ;
  - orthogonales sont non corrélées.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Contributions et représentation des variables

- Contribution de la variable j à l'axe i : d_{ij}^2/λ_i car

$$I_{v_i}(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{p}(< X_j, v_i >_P)^2 = \sum_{j=1}^{p} d_{ij}^2 = \lambda_i.$$

- Qualité de représentation de la variable X_j sur l'axe i :

$$\cos^2(X_j, v_i) =< X_j, v_i >_P^2 = d_{ij}^2.$$

- Corrélations entre variables : $\rho(X_j, X_k) = \cos(X_j, X_k)$. Donc, sur le cercle des corrélations, deux variable bien représentées
  - proches sont fortement corrélées ;
  - qui s'opposent sont négativement corrélées ;
  - orthogonales sont non corrélées.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Contributions et représentation des variables

- Contribution de la variable j à l'axe i : d_{ij}^2/λ_i car

$$I_{v_i}(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{p}(< X_j, v_i >_P)^2 = \sum_{j=1}^{p} d_{ij}^2 = \lambda_i.$$

- Qualité de représentation de la variable X_j sur l'axe i :

$$\cos^2(X_j, v_i) =< X_j, v_i >_p^2 = d_{ij}^2.$$

- Corrélations entre variables : $\rho(X_j, X_k) = \cos(X_j, X_k)$. Donc, sur le cercle des corrélations, deux variable bien représentées
  - proches sont fortement corrélées ;
  - qui s'opposent sont négativement corrélées ;
  - orthogonales sont non corrélées.

Variables et individus supplémentaires

Certaines analyses peuvent être menées en retirant des variables ou des individus pour construire les axes de l'ACP :

- individus aberrants pouvant "trop" contribuer à l'inertie ;
- variables ayant été construites à partir d'autres variables déjà utilisées dans l'analyse. Les variables `classement` et `points` sur l'exemple du décathlon.

Une fois l'ACP réalisée, il peut néanmoins être intéressant de visualiser comment ces individus ou variables se situent par rapport aux autres.

Variables et individus supplémentaires

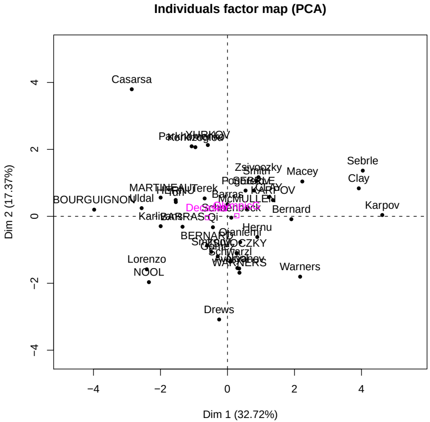
La méthode est simple. Il suffit de

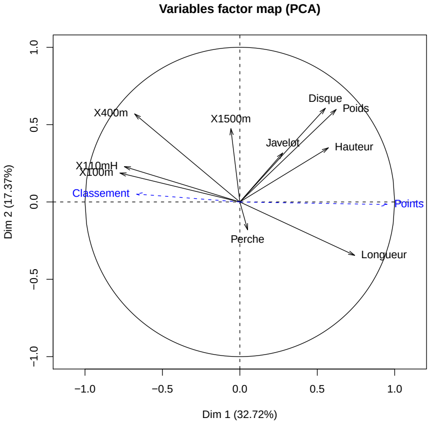
1. faire subir à ces nouveaux éléments les mêmes transformations qu'aux autres (centrage et réduction) ;
2. projeter ces nouveaux éléments sur les axes factoriels du nuage des individus ou des variables.

Retour à l'exemple du décathlon

- On fait l'ACP du jeu de données en utilisant les 41 individus et les 10 variables correspondant aux disciplines du decathlon. les variables `classement`, `points` et `competition` sont mises en supplémentaire.
- On fait l'analyse des 4 premiers axes.

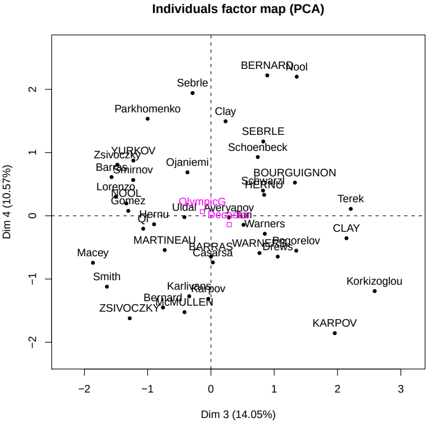
Premier plan factoriel

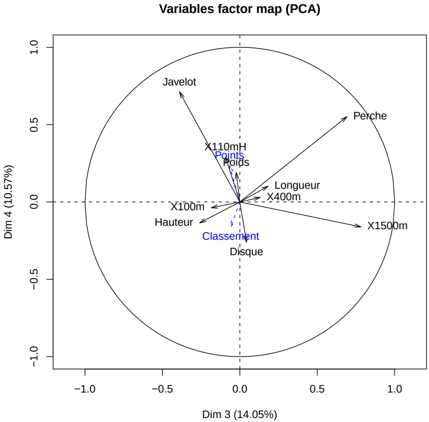




UNIVERSITÉ RENNES 2

Second plan factoriel





Troisième partie III

Théorie de l'estimation

UNIVERSITÉ RENNES 2

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite $n = 100$ patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

- Soit p_0 la probabilité de guérison suite au traitement en question.
- On est tentés de conclure $p_0 \approx 72$.

Un tel résultat n'a cependant guère d'intêret si on n'est pas capable de préciser l'erreur susceptible d'être commise par cette estimation.

Exemple 1

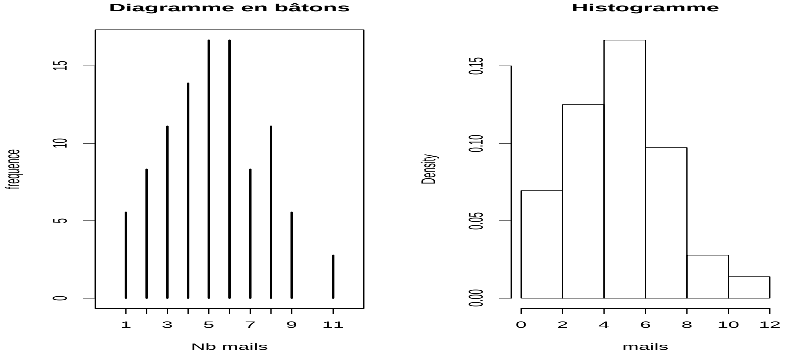
- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite $n = 100$ patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

- Soit p_0 la probabilité de guérison suite au traitement en question.
- On est tentés de conclure $p_0 \approx 72$.

Un tel résultat n'a cependant guère d'intêret si on n'est pas capable de préciser l'erreur susceptible d'être commise par cette estimation.

Exemple 2

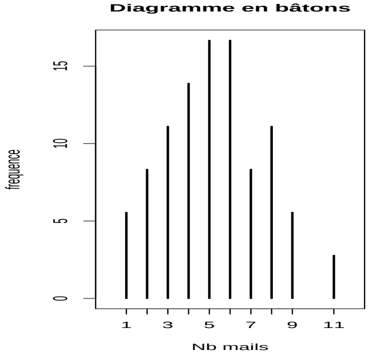
- On s'intéresse au nombre de mails reçus par jour par un utilisateur pendant 36 journées.
- $\bar{x} = 5.22$, $S_n^2 = 5.72$.

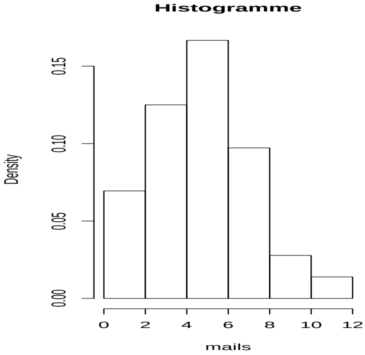


Quelle est la probabilité de recevoir plus de 5 mails dans une journée ?

Exemple 2

- On s'intéresse au nombre de mails reçus par jour par un utilisateur pendant 36 journées.
- $\bar{x} = 5.22$, $S_n^2 = 5.72$.

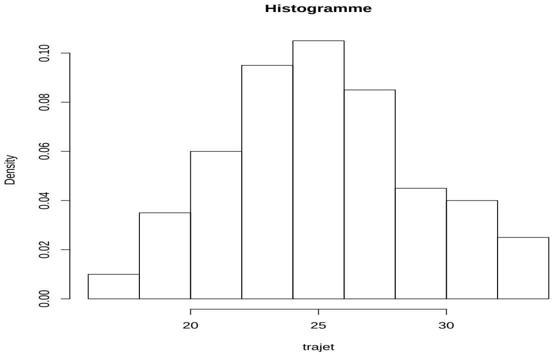




Quelle est la probabilité de recevoir plus de 5 mails dans une journée ?

Exemple 3

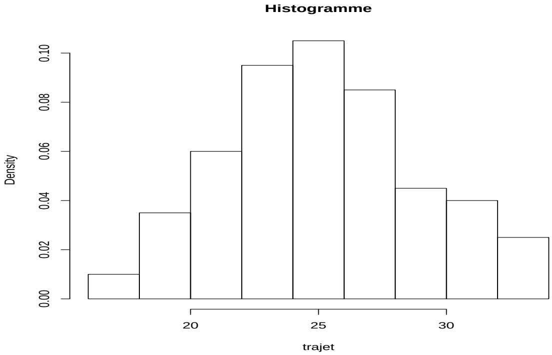
- Temps mis pour venir de son domicile à Supelec.
- On dispose de $n = 100$ mesures : $\bar{x} = 25.1$, $S_n^2 = 14.46$.



J'ai un devoir à 8h30, quelle est la probabilité que j'arrive en retard si je pars de chez moi à 7h55 ?

Exemple 3

- Temps mis pour venir de son domicile à Supelec.
- On dispose de $n = 100$ mesures : $\bar{x} = 25.1$, $S_n^2 = 14.46$.



J'ai un devoir à 8h30, quelle est la probabilité que j'arrive en retard si je pars de chez moi à 7h55 ?

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

UNIVERSITÉ RENNES 2

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

UNIVERSITÉ RENNES 2

Problème

- Nécessité de se dégager des observations $x_1, \dots, x_n$ pour répondre à de telles questions.
- Si on mesure la durée du trajet pendant 100 nouveaux jours, on peut en effet penser que les nouvelles observations ne seront pas exactement les mêmes que les anciennes.

Idée

Considérer que les n valeurs observées $x_1, \dots, x_n$ sont des réalisations de variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

Attention

X_i est une variable aléatoire et x_i est une réalisation de cette variable, c'est-à-dire un nombre !

Un modèle pour l'exemple 1

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

Un modèle pour l'exemple 1

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Un modèle pour l'exemple 1

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ patient a guéri, 0 sinon.
- On peut supposer que x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de bernoulli de paramètre p_0.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ est un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi $B(p_0)$.

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénoménes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénoménes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

- Lors de la modélisation statistique, l'espace Ω n'est généralement jamais caractérisé.
- Il contient tous les "phénoménes" pouvant expliquer les sources d'aléa (qui ne sont pas explicables...).
- En pratique, l'espace d'arrivée est généralement suffisant.

Loi de probabilité

Etant donnée **P** une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on appelle loi de probabilité de X la mesure $\mathbf{P}_X$ définie par

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(A')) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Une loi de probabilité est caractérisée par

- sa fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.
- sa densité : $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\, dx.$$

Loi de probabilité

Etant donnée $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on appelle loi de probabilité de X la mesure $\mathbf{P}_X$ définie par

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(A')) = \mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Une loi de probabilité est caractérisée par

- sa fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.
- sa densité : $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}_X(B) = \int_B f_X(x)\, dx.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définitions

Modèle

On appelle **modèle statistique** tout triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ où

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

Le problème du statisticien

- n variables aléatoires i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathbf{P}$.
- Trouver une famille de lois $\mathcal{P}$ susceptible de contenir $\mathbf{P}$.
- Trouver dans $\mathcal{P}$ une loi qui soit la plus proche de $\mathbf{P}$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définitions

Modèle

On appelle **modèle statistique** tout triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ où

- $\mathcal{H}$ est l'espace des observations (l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience) ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités définie sur $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$.

Le problème du statisticien

- n variables aléatoires i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathbf{P}$.
- Trouver une famille de lois $\mathcal{P}$ susceptible de contenir $\mathbf{P}$.
- Trouver dans $\mathcal{P}$ une loi qui soit la plus proche de $\mathbf{P}$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemples

	$\mathcal{H}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{P}$
Exemple 1	$\{0,1\}$	$\mathcal{P}(\{0,1\})$	$\{B(p), p \in \{0,1\}\}$
Exemple 2	$\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\{\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0\}$
Exemple 3	$\mathbb{R}$	$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	$\{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Paramétrique versus non paramétrique

Définition

- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \in \mathbb{R}^d$ alors on parle de modèle paramétrique et Θ est l'espace des paramètres. Si $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$ est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est de dimension infinie, on parle de modèle non paramétrique.

Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ est un modèle paramétrique.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$ est un modèle non paramétrique.

Le problème sera d'estimer (μ, σ^2) ou f à partir de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

Paramétrique versus non paramétrique

Définition

- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \in \mathbb{R}^d$ alors on parle de modèle paramétrique et Θ est l'espace des paramètres. Si $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$ est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est de dimension infinie, on parle de modèle non paramétrique.

Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ est un modèle paramétrique.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$ est un modèle non paramétrique.

Le problème sera d'estimer (μ, σ^2) ou f à partir de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Paramétrique versus non paramétrique

Définition

- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \in \mathbb{R}^d$ alors on parle de modèle paramétrique et Θ est l'espace des paramètres. Si $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$ est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est de dimension infinie, on parle de modèle non paramétrique.

Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ est un modèle paramétrique.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$ est un modèle non paramétrique.

Le problème sera d'estimer (μ, σ^2) ou f à partir de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

Paramétrique versus non paramétrique

Définition

- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \in \mathbb{R}^d$ alors on parle de modèle paramétrique et Θ est l'espace des paramètres. Si $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$ est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ est de dimension infinie, on parle de modèle non paramétrique.

Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ est un modèle paramétrique.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$ est un modèle non paramétrique.

Le problème sera d'estimer (μ, σ^2) ou f à partir de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle linéaire (paramétrique)

- On pose

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$

où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle linéaire (paramétrique)

- On pose

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$

où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$. On dispose d'un n échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Modèle linéaire (paramétrique)

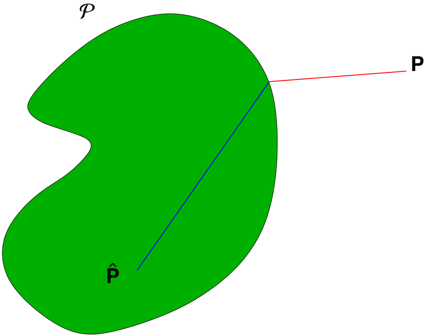
- On pose
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$
- Le problème est d'estimer $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Un modèle non paramétrique

- On pose
$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$$
où $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
- Le problème est d'estimer m à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

2 types d'erreur

- Poser un modèle revient à choisir une famille de loi candidates pour reconstruire la loi des données **P**.

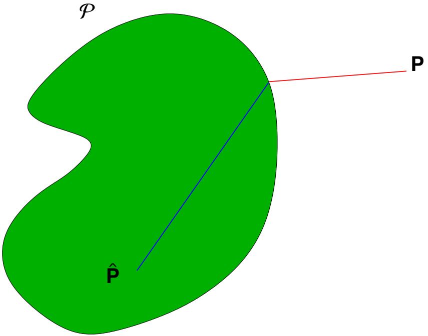


On distingue deux types d'erreurs :

- Erreur d'estimation : erreur commise par le choix d'une loi dans $\mathcal{P}$ par rapport au meilleur choix.
- Erreur d'approximation : erreur commise par le choix de $\mathcal{P}$.

2 types d'erreur

- Poser un modèle revient à choisir une famille de loi candidates pour reconstruire la loi des données **P**.



On distingue deux types d'erreurs :

- Erreur d'estimation : erreur commise par le choix d'une loi dans $\mathcal{P}$ par rapport au meilleur choix.
- Erreur d'approximation : erreur commise par le choix de $\mathcal{P}$.

Objectifs

Etant donné un modèle $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$:

- trouver des procédures (automatiques) permettant de sélectionner une loi $\hat{\mathbf{P}}$ dans $\mathcal{P}$ à partir d'un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$.
- Etudier les performances des lois choisies.

- Dans la suite, on va considérer uniquement des modèles paramétriques $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ avec Θ de dimension finie (typiquement $\mathbb{R}^p$).
- Choisir une loi reviendra donc à choisir un paramètre $\hat{\theta}$ à partir de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

Objectifs

Etant donné un modèle $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$:

- trouver des procédures (automatiques) permettant de sélectionner une loi $\hat{\mathbf{P}}$ dans $\mathcal{P}$ à partir d'un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$.
- Etudier les performances des lois choisies.

- Dans la suite, on va considérer uniquement des modèles paramétriques $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ avec Θ de dimension finie (typiquement $\mathbb{R}^p$).
- Choisir une loi reviendra donc à choisir un paramètre $\hat{\theta}$ à partir de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.

- Les modèles que nous allons considérer auront pour espace d'observations un ensemble dénombrable Ω ou $\mathbb{R}^d$ et seront munis des tribus $\mathcal{P}(\Omega)$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Dans la suite, on se donne un modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.

Echantillon

Un échantillon de taille n est une suite $X_1, \dots, X_n$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$, pour $\theta_0 \in \Theta$.

Notations

- L'échantillon définit un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ ayant comme loi $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$.
- On note $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$ le modèle produit.
- Le modèle $\mathcal{M}_n$ correspond à un ensemble de lois sur $\mathcal{H}^n$ contenant $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$

- Les modèles que nous allons considérer auront pour espace d'observations un ensemble dénombrable Ω ou $\mathbb{R}^d$ et seront munis des tribus $\mathcal{P}(\Omega)$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Dans la suite, on se donne un modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.

Echantillon

Un échantillon de taille n est une suite $X_1, \dots, X_n$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$, pour $\theta_0 \in \Theta$.

Notations

- L'échantillon définit un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ ayant comme loi $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$.
- On note $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$ le modèle produit.
- Le modèle $\mathcal{M}_n$ correspond à un ensemble de lois sur $\mathcal{H}^n$ contenant $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$

UNIVERSITÉ RENNES 2

- Les modèles que nous allons considérer auront pour espace d'observations un ensemble dénombrable Ω ou $\mathbb{R}^d$ et seront munis des tribus $\mathcal{P}(\Omega)$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Dans la suite, on se donne un modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.

Echantillon

Un échantillon de taille n est une suite $X_1, \dots, X_n$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$, pour $\theta_0 \in \Theta$.

Notations

- L'échantillon définit un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ ayant comme loi $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$.
- On note $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$ le modèle produit.
- Le modèle $\mathcal{M}_n$ correspond à un ensemble de lois sur $\mathcal{H}^n$ contenant $\mathbf{P}_{\theta_0}^{\otimes n}$

UNIVERSITÉ RENNES 2

La démarche statistique

1. On récolte *n* observations (*n* valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de *n* expériences aléatoires indépendantes.

2. **Modélisation :** on suppose que les *n* valeurs sont des réalisations de *n* variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$. Ce qui nous amène à définir le modèle $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$.

3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit la plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.

La démarche statistique

1. On récolte *n* observations (*n* valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de *n* expériences aléatoires indépendantes.

2. **Modélisation :** on suppose que les *n* valeurs sont des réalisations de *n* variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$. Ce qui nous amène à définir le modèle $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$.

3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit la plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.

1. On récolte *n observations* (n valeurs) $x_1, \dots, x_n$ qui sont le résultats de n expériences aléatoires indépendantes.

2. **Modélisation :** on suppose que les n valeurs sont des réalisations de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$. Ce qui nous amène à définir le modèle $\mathcal{M}_n = (\mathcal{H}^n, \{\mathbf{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta\})$.

3. **Estimation :** chercher dans le modèle une loi $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$ qui soit la plus proche possible de $\mathbf{P}_{\theta_0}$ $\Longrightarrow$ chercher un **estimateur** $\hat{\theta}$ de θ_0.

Définitions

- Une statistique est une application mesurable définie sur $\mathcal{H}^n$.
- Un estimateur (de θ_0) est une fonction mesurable de $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendante de θ à valeurs dans un sur-ensemble de Θ.

Exemple 1

Les variables aléatoires $\hat{\theta}_1 = X_1$ et $\hat{\theta}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ sont des estimateurs de p_0.

Remarque

- Un estimateur $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$: c'est une variable aléatoire.
- Démarche :
  1. Chercher le "meilleur" estimateur $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$.
  2. A la fin, calculer l'estimation $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ (fait par le logiciel).

Estimateurs

Définitions

- Une statistique est une application mesurable définie sur $\mathcal{H}^n$.
- Un estimateur (de θ_0) est une fonction mesurable de $(X_1, \dots, X_n)$ indépendante de θ à valeurs dans un sur-ensemble de Θ.

Exemple 1

Les variables aléatoires $\hat{\theta}_1 = X_1$ et $\hat{\theta}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ sont des estimateurs de p_0.

Remarque

- Un estimateur $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$: c'est une variable aléatoire.
- Démarche :
  1. Chercher le "meilleur" estimateur $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$.
  2. A la fin, calculer l'estimation $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ (fait par le logiciel).

Estimateurs

Définitions

- Une statistique est une application mesurable définie sur $\mathcal{H}^n$.
- Un estimateur (de θ_0) est une fonction mesurable de $(X_1, \dots, X_n)$ indépendante de θ à valeurs dans un sur-ensemble de Θ.

Exemple 1

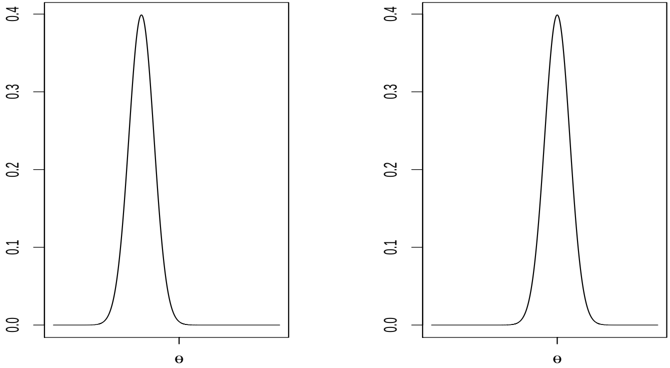
Les variables aléatoires $\hat{\theta}_1 = X_1$ et $\hat{\theta}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ sont des estimateurs de p_0.

Remarque

- Un estimateur $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$: c'est une variable aléatoire.
- Démarche :
  1. Chercher le "meilleur" estimateur $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$.
  2. A la fin, calculer l'estimation $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ (fait par le logiciel).

UNIVERSITÉ RENNES 2

- Un estimateur $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire. Il va donc posséder une loi.



- Un moyen de mesure la qualité de $\hat{\theta}$ est de regarder sa "valeur moyenne" et de la comparer à θ.

Biais d'un estimateur

- On désigne par $\mathbf{E}_\theta$ l'espérance sous la loi $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{\mathcal{H}_n} \hat{\theta}(x) \mathbf{P}_\theta \, \mathrm{d}x$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur d'ordre 1.

1. Le biais de $\hat{\theta}$ en θ est $\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$.
2. $\hat{\theta}$ est sans biais lorsque son biais est nul en chaque $\theta \in \Theta$.
3. $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais si pour chaque $\theta \in \Theta$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta$.

Exemple 1

Les estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont sans biais.

Biais d'un estimateur

- On désigne par $\mathbf{E}_\theta$ l'espérance sous la loi $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathcal{H}_n} \hat{\theta}(x) \mathbf{P}_\theta \, \mathrm{d}x$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur d'ordre 1.

1. Le biais de $\hat{\theta}$ en θ est $\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$.
2. $\hat{\theta}$ est sans biais lorsque son biais est nul en chaque $\theta \in \Theta$.
3. $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais si pour chaque $\theta \in \Theta$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta$.

Exemple 1

Les estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont sans biais.

Biais d'un estimateur

- On désigne par $\mathbf{E}_\theta$ l'espérance sous la loi $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathcal{H}_n} \hat{\theta}(x)\mathbf{P}_\theta \, \mathrm{d}x$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$.

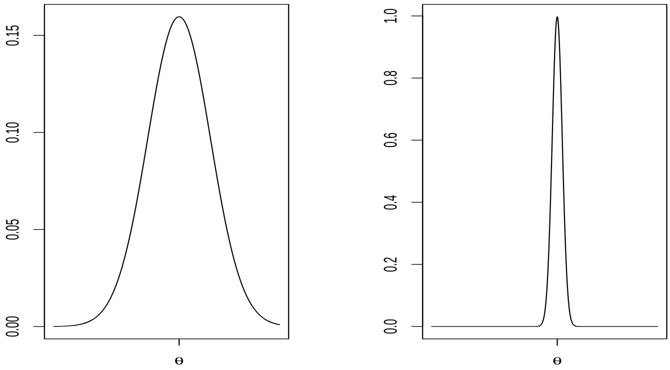
Soit $\hat{\theta}$ un estimateur d'ordre 1.

1. Le biais de $\hat{\theta}$ en θ est $\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta$.
2. $\hat{\theta}$ est sans biais lorsque son biais est nul en chaque $\theta \in \Theta$.
3. $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais si pour chaque $\theta \in \Theta$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) = \theta$.

Exemple 1

Les estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont sans biais.

- Mesurer le biais n'est pas suffisant.
- Il faut également mesurer la dispersion des estimateurs.



Risque quadratique

Définitions

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur d'ordre 2.

1. Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ sous $\mathbf{P}_\theta$ est

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta} - \theta\|^2$$

2. Soit $\hat{\theta}'$ un autre estimateur d'ordre 2. On dit que $\hat{\theta}$ est préférable à $\hat{\theta}'$ si

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) \leq \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}') \ \forall \theta \in \Theta.$$

Exemple 1

$\hat{\theta}_2$ est préférable à $\hat{\theta}_1$.

Risque quadratique

Définitions

Soit $\hat\theta$ un estimateur d'ordre 2.

1. Le risque quadratique de $\hat\theta$ sous $\mathbf{P}_\theta$ est
$$\mathcal{R}(\theta,\hat\theta)=\mathbf{E}_\theta\|\hat\theta-\theta\|^2$$
2. Soit $\hat\theta'$ un autre estimateur d'ordre 2. On dit que $\hat\theta$ est préférable à $\hat\theta'$ si
$$\mathcal{R}(\theta,\hat\theta)\leq\mathcal{R}(\theta,\hat\theta')\ \forall\theta\in\Theta.$$

Exemple 1

$\hat\theta_2$ est préférable à $\hat\theta_1$.

Estimateur VUMSB

Propriété décomposition biais variance

1. Si $\hat{\theta}$ est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta\|^2 + \mathbf{E}_\theta\|\hat{\theta} - \mathbf{E}_\theta\hat{\theta}\|^2.$$

2. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = b(\hat{\theta})^2 + \mathbf{V}(\hat{\theta}).$$

Définition

Si $\hat{\theta}$ est sans biais, on dit qu'il est de variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB) si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2.

Exemple

$\hat{\theta}_2$ est VUMSB.

Estimateur VUMSB

Propriété décomposition biais variance

1. Si $\hat{\theta}$ est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbf{E}_\theta(\hat{\theta}) - \theta\|^2 + \mathbf{E}_\theta\|\hat{\theta} - \mathbf{E}_\theta\hat{\theta}\|^2.$$

2. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = b(\hat{\theta})^2 + \mathbf{V}(\hat{\theta}).$$

Définition

Si $\hat{\theta}$ est sans biais, on dit qu'il est de variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB) si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2.

Exemple

$\hat{\theta}_2$ est VUMSB.

Estimateur VUMSB

Propriété décomposition biais variance

1. Si $\hat\theta$ est d'ordre 2, on a la décomposition
$$\mathcal{R}(\theta,\hat\theta) = \|\mathbf{E}_\theta(\hat\theta)-\theta\|^2 + \mathbf{E}_\theta\|\hat\theta-\mathbf{E}_\theta\hat\theta\|^2.$$
2. Si $\theta\in\mathbb{R}$, on obtient
$$\mathcal{R}(\theta,\hat\theta) = b(\hat\theta)^2 + \mathbf{V}(\hat\theta).$$

Définition

Si $\hat\theta$ est sans biais, on dit qu'il est de variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB) si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2.

Exemple

$\hat\theta_2$ est VUMSB.

Consistance

On dit que l'estimateur $\hat{\theta}$ est consistant (ou convergent) si $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \theta \; \forall \theta \in \Theta$, c'est-à-dire

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \varepsilon > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\|\hat{\theta} - \theta\| > \varepsilon) = 0.$$

Soit $(v_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $v_n \to \infty$. On dit que $\hat{\theta}$ est asymptotiquent normal, de vitesse v_n si $\forall \theta \in \Theta$

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\theta)$$

où Σ_θ est une matrice symétrique définie positive.

Consistance

On dit que l'estimateur $\hat{\theta}$ est consistant (ou convergent) si $\hat{\theta} \overset{\mathbf{P}_\theta}{\to} \theta \ \forall \theta \in \Theta$, c'est-à-dire

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \varepsilon > 0 \ \ \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\|\hat{\theta} - \theta\| > \varepsilon) = 0.$$

Soit $(v_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $v_n \to \infty$. On dit que $\hat{\theta}$ est asymptotiquent normal, de vitesse v_n si $\forall \theta \in \Theta$

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma_\theta)$$

où Σ_θ est une matrice symétrique définie positive.

Outils

La loi des grands nombres et le théorème central limite sont souvent utilisés pour montrer la consistance et la normalité asymptotique.

Loi des grands nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$. Alors $\bar{X}_n \stackrel{p.s.}{\to} \mu$. Si de plus X_i est d'ordre 2, on a $\bar{X}_n \stackrel{L_2}{\to} \mu$.

TCL

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance covariance Σ, alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Exemple 1

$\hat{\theta}_2$ est consistant et asymptotiquement normal (avec la vitesse $\sqrt{n}$).

La loi des grands nombres et le théorème central limite sont souvent utilisés pour montrer la consistance et la normalité asymptotique.

Loi des grands nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$. Alors $\bar{X}_n \stackrel{p.s.}{\to} \mu$. Si de plus X_i est d'ordre 2, on a $\bar{X}_n \stackrel{L_2}{\to} \mu$.

TCL

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance covariance Σ, alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Exemple 1

$\hat{\theta}_2$ est consistant et asymptotiquement normal (avec la vitesse $\sqrt{n}$).

Outils

La loi des grands nombres et le théorème central limite sont souvent utilisés pour montrer la consistance et la normalité asymptotique.

Loi des grands nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$. Alors $\bar{X}_n \stackrel{p.s.}{\to} \mu$. Si de plus X_i est d'ordre 2, on a $\bar{X}_n \stackrel{L_2}{\to} \mu$.

TCL

Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. d'espérance $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance covariance Σ, alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Exemple 1

$\hat{\theta}_2$ est consistant et asymptotiquement normal (avec la vitesse $\sqrt{n}$).

Delta méthode

- $X_1, \ldots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$ estimateur de λ asymptotiquement normal ?

Delta méthode

Si $v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles au point θ, alors

$$v_n(h(\hat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Dh_\theta X$$

où Dh_θ est la matrice $m \times d$ de terme $(Dh_\theta)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}(\theta)$.

- On obtient grâce à la delta-méthode :

$$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left[\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Delta méthode

- $X_1, \ldots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$ estimateur de λ asymptotiquement normal ?

Delta méthode

Si $v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles au point θ, alors

$$v_n(h(\hat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Dh_\theta X$$

où Dh_θ est la matrice $m \times d$ de terme $(Dh_\theta)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}(\theta)$.

- On obtient grâce à la delta-méthode :

$$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left[\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Delta méthode

- $X_1, \dots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$ estimateur de λ asymptotiquement normal ?

Delta méthode

Si $v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ et si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ admet des dérivées partielles au point θ, alors

$$v_n(h(\hat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Dh_\theta X$$

où Dh_θ est la matrice $m \times d$ de terme $(Dh_\theta)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}(\theta)$.

- On obtient grâce à la delta-méthode :

$$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left[\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

- modèle $(\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.
- n échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$.

Idée

Trouver le paramètre $\theta \in \Theta$ tel que les moments empiriques coïncident avec les moments théoriques :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j \approx m_j(\theta_0) = \mathbf{E}_{\theta_0}(X_i^j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Si $p = 1$ la méthode revient à résoudre l'équation en θ :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbf{E}_\theta(X_1).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

- modèle $(\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.
- n échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$.

Idée

Trouver le paramètre $\theta \in \Theta$ tel que les moments empiriques coïncident avec les moments théoriques :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^j \approx m_j(\theta_0) = \mathbf{E}_{\theta_0}(X_i^j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Si $p = 1$ la méthode revient à résoudre l'équation en θ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbf{E}_\theta(X_1).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

- modèle $(\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.
- n échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$.

Idée

Trouver le paramètre $\theta \in \Theta$ tel que les moments empiriques coïncident avec les moments théoriques :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^j \approx m_j(\theta_0) = \mathbf{E}_{\theta_0}(X_i^j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Si $p = 1$ la méthode revient à résoudre l'équation en θ :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \mathbf{E}_\theta(X_1).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

L'estimateur des moments

L'estimateur des moments est défini comme la solution du système à p équations :

$$\begin{cases} m_1(\theta) = \hat{m}_1 \\ \vdots \\ m_p(\theta) = \hat{m}_p \end{cases}$$

Si

$$M : \Theta \to \mathcal{L}$$
$$\theta \mapsto (m_1(\theta), \ldots, m_p(\theta))$$

est une bijection. Alors l'estimateur des moments existe et est unique.

L’estimateur des moments est défini comme la solution du système à p équations :

$$\begin{cases} m_1(\theta) = \hat{m}_1 \\ \vdots \\ m_p(\theta) = \hat{m}_p \end{cases}$$

Si

$$\begin{aligned} M : \ \Theta &\to \mathcal{L} \\ \theta &\mapsto (m_1(\theta), \dots, m_p(\theta)) \end{aligned}$$

est une bijection. Alors l’estimateur des moments existe et est unique.

Exemple

Pour le modèle gaussien $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, il est facile de voir que l'estimateur des moments $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ est

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \hat{\mu}^2.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Propriété

Rappel

Si $\mathbf{P}_\theta$ est d'ordre p, la LFGN et le TCL assure la consistance et la normalité asymptotique des moments empiriques.

Théorème

Soit $\hat{\theta}$ l'estimateur des moments.

1. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre p fini et si M est un homéomorphisme alors $\hat{\theta}$ est consistant.
2. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre $2p$ fini et si M est un difféoéomorphisme alors

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_\theta)$$

où $\mathbb{V}_\theta = DM_\theta^{-1}\,\Sigma_\theta\,(DM_\theta^{-1})'$ et $\Sigma_\theta = \mathbf{V}(X_1, X_1^2, \dots, X_1^p)$.

Propriété

Rappel

Si $\mathbf{P}_\theta$ est d'ordre p, la LFGN et le TCL assure la consistance et la normalité asymptotique des moments empiriques.

Théorème

Soit $\hat\theta$ l'estimateur des moments.

1. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre p fini et si M est un homéomorphisme alors $\hat\theta$ est consistant.
2. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre $2p$ fini et si M est un difféoéomorphisme alors

$$\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_\theta)$$

où $\mathbb{V}_\theta = DM_\theta^{-1}\,\Sigma_\theta\,(DM_\theta^{-1})'$ et $\Sigma_\theta = \mathbf{V}(X_1, X_1^2, \dots, X_1^p)$.

Propriété

Rappel

Si $\mathbf{P}_\theta$ est d'ordre p, la LFGN et le TCL assure la consistance et la normalité asymptotique des moments empiriques.

Théorème

Soit $\hat\theta$ l'estimateur des moments.

1. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre p fini et si M est un homéomorphisme alors $\hat\theta$ est consistant.
2. Si $\mathbf{P}_\theta$ admet un moment d'ordre $2p$ fini et si M est un difféoéomorphisme alors

$$\sqrt{n}(\hat\theta - \theta) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_\theta)$$

où $\mathbb{V}_\theta = DM_\theta^{-1}\,\Sigma_\theta\,(DM_\theta^{-1})'$ et $\Sigma_\theta = \mathbf{V}(X_1, X_1^2, \dots, X_1^p)$.

Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim B(p)$.
- $x_1, \dots, x_n$ réalisations de $X_1, \dots, X_n$.

Idée

1. La quantité $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ peut être vue comme une mesure de la probabilité d'observer les données dont on dispose.
2. Choisir le paramètre p qui maximise cette probabilité.

- $L(x_1, \dots, x_n; p)$ est appelée **vraisemblance** (elle mesure la vraisemblance des réalisations $x_1, \dots, x_n$ sous la loi $\mathbf{P}_p$).
- L'approche consiste à choisir p qui "rend ces réalisations les plus vraisemblables possible".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim B(p)$.
- $x_1, \dots, x_n$ réalisations de $X_1, \dots, X_n$.

Idée

1. La quantité $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ peut être vue comme une mesure de la probabilité d'observer les données dont on dispose.
2. Choisir le paramètre p qui maximise cette probabilité.

- $L(x_1, \dots, x_n; p)$ est appelée **vraisemblance** (elle mesure la vraisemblance des réalisations $x_1, \dots, x_n$ sous la loi $\mathbf{P}_p$).
- L'approche consiste à choisir p qui "rend ces réalisations les plus vraisemblables possible".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $X_1 \sim B(p)$.
- $x_1, \dots, x_n$ réalisations de $X_1, \dots, X_n$.

Idée

1. La quantité $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}_p(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ peut être vue comme une mesure de la probabilité d'observer les données dont on dispose.
2. Choisir le paramètre p qui maximise cette probabilité.

- $L(x_1, \dots, x_n; p)$ est appelée **vraisemblance** (elle mesure la vraisemblance des réalisations $x_1, \dots, x_n$ sous la loi $\mathbf{P}_p$).
- L'approche consiste à choisir p qui "rend ces réalisations les plus vraisemblables possible".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Vraisemblance

Cas discret

La **vraisemblance** du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$ définie par

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \mathbf{P}_\theta^{\otimes n}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}_\theta(\{x_i\}).$$

Cas absolument continu

Soit $f(., \theta)$ la densité associé à $\mathbf{P}_\theta$. La **vraisemblance** du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$ définie par

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Vraisemblance

Cas discret

La **vraisemblance** du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$ définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mathbf{P}_\theta^{\otimes n}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}_\theta(\{x_i\}).$$

Cas absolument continu

Soit $f(., \theta)$ la densité associé à $\mathbf{P}_\theta$. La **vraisemblance** du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$ définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

L'estimateur du maximum de vraisemblance

Définition

Un **estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)** est une statistique g qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$

$$L(x_1, \dots, x_n; g(x_1, \dots, x_n)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

L'EMV s'écrit donc $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$.

- Pour le modèle gaussien $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, L'EMV est

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2.$$

- Il coïncide avec l'estimateur des moments.

L'estimateur du maximum de vraisemblance

Définition

Un **estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)** est une statistique g qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{H}^n$

$$L(x_1,\dots,x_n;g(x_1,\dots,x_n))=\sup_{\theta\in\Theta}L(x_1,\dots,x_n;\theta).$$

L'EMV s'écrit donc $\hat\theta=g(X_1,\dots,X_n)$.

- Pour le modèle gaussien $\mathbf{P}_\theta=\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, L'EMV est

$$\hat\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \text{ et } \hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\hat\mu^2.$$

- Il coïncide avec l'estimateur des moments.

Invariance

Soit $\psi : \Theta \to \mathbb{R}^k$ et $\hat{\theta}$ l'EMV de θ. Alors l'emv de $\psi(\theta)$ est $\psi(\hat{\theta})$.

Consistance

On suppose que $\mathbf{P}_\theta$ admet une densité $f(x, \theta)$, que Θ est un ouvert et que $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est différentiable. Alors l'EMV $\hat{\theta}$ est consistant.

Propriétés de l'EMV

Invariance

Soit $\psi : \Theta \to \mathbb{R}^k$ et $\hat{\theta}$ l'EMV de θ. Alors l'emv de $\psi(\theta)$ est $\psi(\hat{\theta})$.

Consistance

On suppose que $\mathbf{P}_\theta$ admet une densité $f(x, \theta)$, que Θ est un ouvert et que $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est différentiable. Alors l'EMV $\hat{\theta}$ est consistant.

- On se place dans le cas où θ est réel.

Objectif : montrer que sous certaines hypothèses de régularité l'EMV est asymptotiquement VUMSB :

1. $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais.
2. il existe une fonction $r(n, \theta)$ telle que pour tout estimateur T sans biais de θ, on a $\mathbf{V}(T) \geq r(n, \theta)$.
3. la variance asymptotique de l'EMV vaut $r(n, \theta)$.

L'information de Fisher

Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ un modèle. On suppose dans cette partie que :

- Θ est un ouvert.
- $\mathbf{P}_\theta$ admet une densité $f(x, \theta)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue ou à la mesure de comptage) et que f est deux fois dérivable par rapport à θ.
- $\forall h \in L^1(\mathbf{P}_\theta)$ on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int h(x) f(x, \theta) \, \mathrm{d}x = \int h(x) \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta) \, \mathrm{d}x.$$

On appelle **information de Fisher** du modèle $\mathcal{M}$ au point θ :

$$I(\theta) = \mathbf{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log(f(X, \theta)) \right)^2 \right].$$

RENNES 2

- **Fonction de score :**

$$S(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log(f(x,\theta)).$$

Propriété

$$I(\theta) = -\mathbf{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(f(X,\theta))\right].$$

$$I(\theta) \geq 0 \text{ et } I(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(x,\theta) = f(\theta).$$

$I(\theta)$ mesure en quelque sorte le pouvoir de discrimination du modèle entre deux valeurs proches du paramètre θ :

- $I(\theta)$ grand : il sera "facile" d'identifier quel modèle est le meilleur.
- $I(\theta)$ petit : l'identification sera plus difficile.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- **Fonction de score :**

$$S(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log(f(x,\theta)).$$

Propriété

$$I(\theta) = -\mathbf{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(f(X,\theta))\right].$$

$$I(\theta) \geq 0 \text{ et } I(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(x,\theta) = f(\theta).$$

$I(\theta)$ mesure en quelque sorte le pouvoir de discrimination du modèle entre deux valeurs proches du paramètre θ :

- $I(\theta)$ grand : il sera "facile" d'identifier quel modèle est le meilleur.
- $I(\theta)$ petit : l'identification sera plus difficile.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Modèle produit

Propriété d'additivité

Si X_1 et X_2 sont deux variables i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$, alors

$$I_{(X_1,X_2)}(\theta) = I_{X_1}(\theta) + I_{X_2}(\theta) = 2I_{X_1}(\theta).$$

Corollaire

L'**information de Fisher** du modèle produit $\mathcal{M}_n$ au point θ vaut $I_n(\theta) = nI(\theta)$.

Sur l'exemple 1, on a $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$.

Modèle produit

Propriété d'additivité

Si X_1 et X_2 sont deux variables i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$, alors

$$I_{(X_1,X_2)}(\theta) = I_{X_1}(\theta) + I_{X_2}(\theta) = 2I_{X_1}(\theta).$$

Corollaire

L'**information de Fisher** du modèle produit $\mathcal{M}_n$ au point θ vaut $I_n(\theta) = nI(\theta)$.

Sur l'exemple 1, on a $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$.

Modèle produit

Propriété d'additivité

Si X_1 et X_2 sont deux variables i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$, alors

$$I_{(X_1,X_2)}(\theta) = I_{X_1}(\theta) + I_{X_2}(\theta) = 2I_{X_1}(\theta).$$

Corollaire

L'**information de Fisher** du modèle produit $\mathcal{M}_n$ au point θ vaut $I_n(\theta) = nI(\theta)$.

Sur l'exemple 1, on a $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$.

Borne de Cramer-Rao

Théorème

Soit $T = T(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur sans biais de θ. Alors

$$\mathbf{V}(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

1. La quantité $\frac{1}{I_n(\theta)}$ est appelée borne de Cramer-Rao.
2. Si un estimateur sans biais $\hat{\theta}$ atteint la borne de Cramer-Rao, il est VUMSB.
3. Si T est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ avec g dérivable, alors $\mathbf{V}(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$.

Exemple 1

$\hat{p} = \bar{X}$ est VUMSB.

Borne de Cramer-Rao

Théorème

Soit $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur sans biais de θ. Alors

$$\mathbf{V}(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

1. La quantité $\frac{1}{I_n(\theta)}$ est appelée borne de Cramer-Rao.
2. Si un estimateur sans biais $\hat{\theta}$ atteint la borne de Cramer-Rao, il est VUMSB.
3. Si T est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ avec g dérivable, alors $\mathbf{V}(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$.

Exemple 1

$\hat{p} = \bar{X}$ est VUMSB.

Borne de Cramer-Rao

Théorème

Soit $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur sans biais de θ. Alors

$$\mathbf{V}(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

1. La quantité $\frac{1}{I_n(\theta)}$ est appelée borne de Cramer-Rao.
2. Si un estimateur sans biais $\hat{\theta}$ atteint la borne de Cramer-Rao, il est VUMSB.
3. Si T est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ avec g dérivable, alors $\mathbf{V}(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$.

Exemple 1

$\hat{p} = \bar{X}$ est VUMSB.

Efficacité asymptotique de l'EMV

Théorème

Sous certaines conditions de régularité sur la densité $f(x,\theta)$, l'EMV $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement gaussien et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right).$$

- $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement sans biais.
- $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace.
- $\hat{\theta}_n$ converge vers θ en moyenne quadratique.

Efficacité asymptotique de l'EMV

Théorème

Sous certaines conditions de régularité sur la densité $f(x, \theta)$, l'EMV $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement gaussien et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right).$$

- $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement sans biais.
- $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace.
- $\hat{\theta}_n$ converge vers θ en moyenne quadratique.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- On se place dans un modèle de densités $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}^p\})$, où $\mathbf{P}_\theta \sim f(.,\theta)$;
- On note $\hat\theta = (\hat\theta_1, \dots, \hat\theta_p)'$ un estimateur du paramètre $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ de matrice de variance covariance $\Sigma_{\hat\theta}$.

Définition

La matrice d'information de Fisher au point θ du modèle ci-dessus est la matrice de dimension $p \times p$ définie par

$$\begin{aligned} I(\theta)_{i,j} =& \mathbf{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log(f(X,\theta))\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log(f(X,\theta))\right] \\ =& -\mathbf{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log(f(X,\theta))\right]. \end{aligned}$$

Théorème

La borne de Cramer-Rao du modèle précédent est $\frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$. C'est-à-dire que pour tout estimateur sans biais $\hat{\theta}$ de θ, on a

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \geq \frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$$

(l'inégalité est à prendre au sens des matrices sdp).

Un exemple : le modèle gaussien

Pour le modèle gaussien $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

La borne de Cramer-Rao vaut

$$BCR = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

Un exemple : le modèle gaussien

Pour le modèle gaussien $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

La borne de Cramer-Rao vaut

$$BCR = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

- **Question :** l'estimateur $\tilde{\theta} = (\bar{X}, S^2)$ est-il efficace ?

Rappel : Corollaire de Cochran

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors :

1. $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$;
2. $\bar{X}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont indépendantes ;
3. $(n\hat{\sigma}^2)/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$.

- On déduit

$$\Sigma_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1}. \end{pmatrix}$$

$\tilde{\theta}$ est (presque) efficace.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- **Question :** l'estimateur $\tilde{\theta} = (\bar{X}, S^2)$ est-il efficace ?

Rappel : Corollaire de Cochran

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors :

1. $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$;
2. $\bar{X}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont indépendantes ;
3. $(n\hat{\sigma}^2)/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$.

- On déduit

$$\Sigma_{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1}. \end{pmatrix}$$

$\tilde{\theta}$ est (presque) efficace.

Efficacité asymptotique de l'emv

Thérorème

On se place dans un modèle de densité $(\mathcal{H}, \{f(.,\theta), \theta \in \Theta\})$. Sous certaines hypothèses de régularité sur la densité f, l'emv $\hat{\theta}$ de θ est

- consistant ;
- asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

Retour au modèle gaussien

L'emv est donné par $\hat{\theta} = (\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$. On obtient par Cochran

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}\right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

Thérorème

On se place dans un modèle de densité $(\mathcal{H}, \{f(., \theta), \theta \in \Theta\})$. Sous certaines hypothèses de régularité sur la densité f, l'emv $\hat{\theta}$ de θ est

- consistant ;
- asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

Retour au modèle gaussien

L'emv est donné par $\hat{\theta} = (\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$. On obtient par Cochran

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}\right)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Motivations

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- Exemple 1 : le taux de guérison du traitement est de 72% (alors qu'on ne l'a testé que sur 100 patients).
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, le taux de guérison se trouve dans l'intervalle $[70\%, 74\%]$ avec une confiance de 90%.

Motivations

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- Exemple 1 : le taux de guérison du traitement est de 72% (alors qu'on ne l'a testé que sur 100 patients).
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, le taux de guérison se trouve dans l'intervalle $[70\%, 74\%]$ avec une confiance de 90%.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Intervalle de confiance

- $X_1, \ldots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.

Définition

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ_0 tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions mesurables telles que $\forall \theta \in \Theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ_0 au niveau $1 - \alpha$.

Remarque importante

- Les quantités $A_n = A_n(X_1, \ldots, X_n)$ et $B_n = B_n(X_1, \ldots, X_n)$ sont aléatoires !
- Les logiciels renverront les réels $a_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $b_n = B_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Intervalle de confiance

- $X_1, \ldots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.

Définition

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ_0 tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions mesurables telles que $\forall \theta \in \Theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ_0 au niveau $1 - \alpha$.

Remarque importante

- Les quantités $A_n = A_n(X_1, \ldots, X_n)$ et $B_n = B_n(X_1, \ldots, X_n)$ sont aléatoires !
- Les logiciels renverront les réels $a_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $b_n = B_n(x_1, \ldots, x_n)$.

Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.

Définition

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ_0 tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions mesurables telles que $\forall \theta \in \Theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ_0 au niveau $1 - \alpha$.

Remarque importante

- Les quantités $A_n = A_n(X_1, \dots, X_n)$ et $B_n = B_n(X_1, \dots, X_n)$ sont aléatoires !
- Les logiciels renverront les réels $a_n = A_n(x_1, \dots, x_n)$ et $b_n = B_n(x_1, \dots, x_n)$.

Intervalle de confiance

- $X_1, \ldots, X_n$ n échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}_{\theta_0}$.

Définition

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ_0 tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions mesurables telles que $\forall \theta \in \Theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\theta(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ_0 au niveau $1 - \alpha$.

Remarque importante

- Les quantités $A_n = A_n(X_1, \ldots, X_n)$ et $B_n = B_n(X_1, \ldots, X_n)$ sont aléatoires !
- Les logiciels renverront les réels $a_n = A_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $b_n = B_n(x_1, \ldots, x_n)$.

- Inégalité de Bienaymé Tchebytchev.
- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre θ :** fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de θ.

Méthode

1. se donner un niveau $1-\alpha$.
2. trouver un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ dont on connait la loi afin de construire une fonction pivotable.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Construction d'un IC

- Inégalité de Bienaymé Tchebytchev.
- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre θ :** fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de θ.

Méthode

1. se donner un niveau $1-\alpha$.
2. trouver un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ dont on connait la loi afin de construire une fonction pivotable.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- Inégalité de Bienaymé Tchebytchev.
- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre θ :** fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de θ.

Méthode

1. se donner un niveau $1-\alpha$.
2. trouver un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ dont on connait la loi afin de construire une fonction pivotable.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

1. On considère le modèle gaussien $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, 4), \mu \in \mathbb{R}\}$ et on cherche un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ.
2. On pose $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a
$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\hat{\mu} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
3. On déduit
$$IC_{95\%}(\mu) = \left[\hat{\mu} - q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}\right].$$

IC pour l'espérance d'une gaussienne

Exemple

1. On considère le modèle gaussien $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, 4), \mu \in \mathbb{R}\}$ et on cherche un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ.
2. On pose $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a
$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\hat{\mu} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
3. On déduit
$$IC_{95\%}(\mu) = \left[\hat{\mu} - q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}\right].$$

IC pour l'espérance d'une gaussienne

Exemple

1. On considère le modèle gaussien $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, 4), \mu \in \mathbb{R}\}$ et on cherche un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ.
2. On pose $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. On a
$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\hat{\mu} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$
3. On déduit
$$IC_{95\%}(\mu) = \left[\hat{\mu} - q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + q_{0.975}\frac{2}{\sqrt{n}}\right].$$

Exemples

1. $P_\theta = \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ avec σ^2 connu :
$$IC_{1-\alpha}(\mu_0) = \left[\bar{X} - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$
2. $P_\theta = \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu :
$$IC_{1-\alpha}(\mu_0) = \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right].$$
3. P_θ d'espérance μ_0 et de variance σ^2 inconnue :
$$IC_{1-\alpha}^{asympt}(\mu_0) = \left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right].$$

IC pour une proportion

- Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p_0)$.
- On pose $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a d'après le TCL

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\hat{p}-p_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- On pose

$$IC_{1-\alpha}(p_0) = \left[\hat{p} - q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}; \hat{p} + q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right].$$

- Prolème : l'IC dépend de p_0 et n'est donc pas calculable.

IC pour une proportion

- Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p_0)$.
- On pose $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. On a d'après le TCL

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\hat{p} - p_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- On pose

$$IC_{1-\alpha}(p_0) = \left[\hat{p} - q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} ; \hat{p} + q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right].$$

- Prolème : l'IC dépend de p_0 et n'est donc pas calculable.

IC pour une proportion

- Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p_0)$.
- On pose $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. On a d'après le TCL

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}(\hat{p} - p_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- On pose

$$IC_{1-\alpha}(p_0) = \left[\hat{p} - q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}; \hat{p} + q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right].$$

- Prolème : l'IC dépend de p_0 et n'est donc pas calculable.

- On peut montrer que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}(\hat{p}-p_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$

- et en déduire l'intervalle de confiance asymptotique

$$IC_{1-\alpha}(p_0) = \left[\hat{p} - q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + q_{1-\alpha_2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right].$$

Exemple sur R : IC pour une moyenne

- On s'intéresse au poids moyen d'adultes atteint d'une pathologie. On dispose de $n = 50$ observations.

```
> poids[1:5]
[1] 85 80 80 60 83
> t.test(poids,conf.level=0.95)

One Sample t-test

data:  poids
t = 60.6608, df = 49, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 70.00451 74.80165
sample estimates:
mean of x
 72.40308
```

Exemple sur R : IC pour une proportion

- On effectue un sondage électoral sur $n = 500$ personnes concernant le second tour d'une élection

```
> sondage[1:5]
[1] B A A B A
Levels: A B
> binom.test(sum(sondage=="A"),500,conf.level=0.90)

Exact binomial test

data:  sum(sondage == "A") and 500
number of successes = 218, number of trials = 500, p-value = 0.004792
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
90 percent confidence interval:
 0.3988760 0.4736887
sample estimates:
probability of success
                 0.436
```

UNIVERSITÉ RENNES 2

Quatrième partie IV

Tests d'hypothèses

1. Introduction

2. Tests paramétriques
   - Vocabulaire
   - Le principe de Neyman-Pearson
   - Puissance de test - Test UPP
   - Exemples
   - Comparaison de deux échantillons gaussiens
   - Cas non gaussien

3. Une introduction aux tests non paramétriques
   - Le test du χ^2 d'adéquation
   - Le test du χ^2 d'indépendance

UNIVERSITÉ RENNES 2

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple 1 : test de conformité

- On s'intéresse à la longueur de pièces fabriquées par une machine.
- "En théorie" la longueur moyenne de ces pièces doit être de 150cm.
- On décide de mesurer 49 pièces choisies au hasard. La valeur moyenne des mesures est de 149.9.

Peut-on dire que la machine est toujours bien réglée ?

Exemple 1 : test de conformité

- On s'intéresse à la longueur de pièces fabriquées par une machine.
- "En théorie" la longueur moyenne de ces pièces doit être de 150cm.
- On décide de mesurer 49 pièces choisies au hasard. La valeur moyenne des mesures est de 149.9.

Peut-on dire que la machine est toujours bien réglée ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemples 2-3

- Un médicamment couramment utilisé est connu pour guérir 60% des patients.
- Un nouveau traitement est expérimenté sur 80 patients.
- On observe 60 guérisons.

Doit-on remplacer l'ancien traitement par le nouveau ?

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

Exemples 2-3

- Un médicamment couramment utilisé est connu pour guérir 60% des patients.
- Un nouveau traitement est expérimenté sur 80 patients.
- On observe 60 guérisons.

Doit-on remplacer l'ancien traitement par le nouveau ?

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

Exemples 2-3

- Un médicamment couramment utilisé est connu pour guérir 60% des patients.
- Un nouveau traitement est expérimenté sur 80 patients.
- On observe 60 guérisons.

Doit-on remplacer l'ancien traitement par le nouveau ?

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

Exemple 4

- On s'intéresse au nombre de garçons dans des familles de 4 enfants :

Nb de garçons	0	1	2	3	4	Total
Effectifs	3	30	39	23	5	100

Est-ce que la variable aléatoire `nombre de garçons` suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(4, p)$?

Exemple 4

- On s'intéresse au nombre de garçons dans des familles de 4 enfants :

Nb de garçons	0	1	2	3	4	Total
Effectifs	3	30	39	23	5	100

Est-ce que la variable aléatoire `nombre de garçons` suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(4, p)$?

Exemple 5

Le titanic a emporté à son bord :

- 325 passagers en première classe
- 285 passagers en deuxième classe
- 706 passagers en troisième classse
- 885 membres d'équipage.

Parmi les survivants on compte :

- 203 passagers en première classe
- 118 passagers en deuxième classe
- 178 passagers en troisième classe
- 212 membres d'équipage.

Existe-t-il un lien entre le fait d'avoir survécu et la classe d'appartenance ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple 5

Le titanic a emporté à son bord :

- 325 passagers en première classe
- 285 passagers en deuxième classe
- 706 passagers en troisième classse
- 885 membres d'équipage.

Parmi les survivants on compte :

- 203 passagers en première classe
- 118 passagers en deuxième classe
- 178 passagers en troisième classe
- 212 membres d'équipage.

Existe-t-il un lien entre le fait d'avoir survécu et la classe d'appartenance ?

Exemple 5

Le titanic a emporté à son bord :

- 325 passagers en première classe
- 285 passagers en deuxième classe
- 706 passagers en troisième classse
- 885 membres d'équipage.

Parmi les survivants on compte :

- 203 passagers en première classe
- 118 passagers en deuxième classe
- 178 passagers en troisième classe
- 212 membres d'équipage.

Existe-t-il un lien entre le fait d'avoir survécu et la classe d'appartenance ?

- Ici, il ne s'agit plus d'estimer un paramètre à partir d'un échantillon mais de prendre une décision à l'aide de cet échantillon.
- Répondre aux questions posées revient à choisir une hypothèse parmi deux (on les notera H_0 et H_1).
- Un test statistique permet de réaliser un tel choix.

	H_0	H_1
Exemple 1	$\mu = 150$	$\mu \neq 150$
Exemple 2	$p = 0.6$	$p \geq 0.6$
Exemple 3	$p_F = p_H$	$p_F \neq p_H$
Exemple 4	$X \sim \mathcal{B}(4, p)$	$X \nsim \mathcal{B}(4, p)$
Exemple 5	$S \perp\!\!\!\perp C$	$S \not\perp\!\!\!\perp C$

1 Introduction

2 Tests paramétriques

- Vocabulaire
- Le principe de Neyman-Pearson
- Puissance de test - Test UPP
- Exemples
- Comparaison de deux échantillons gaussiens
- Cas non gaussien

3 Une introduction aux tests non paramétriques

- Le test du χ^2 d'adéquation
- Le test du χ^2 d'indépendance

UNIVERSITÉ RENNES 2

Hypothèse nulle et hypothèse alternative

- **Modèle statistique** $(\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.
- **Hypothèse nulle** $\Rightarrow H_0 : \theta \in \Theta_0$.
- **Hypothèse alternative** $\Rightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Si $\Theta = \{\theta\}$ l'hypothèse est dite **simple**, sinon elle est dite **multiple**.

A partir de n observations $x = (x_1, \dots, x_n)$, prendre une décision :

- accepter H_0.
- rejeter H_0 au profit de H_1.

Hypothèse nulle et hypothèse alternative

- **Modèle statistique** $(\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$.
- **Hypothèse nulle** $\Rightarrow H_0 : \theta \in \Theta_0$.
- **Hypothèse alternative** $\Rightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.

Si $\Theta = \{\theta\}$ l'hypothèse est dite **simple**, sinon elle est dite **multiple**.

A partir de n observations $x = (x_1, \dots, x_n)$, prendre une décision :

- accepter H_0.
- rejeter H_0 au profit de H_1.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Fonction de test

Définition

- On appelle **fonction de test** toute statistique $\varphi : \mathcal{H}^n \to \{0,1\}$
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{1\})$ noté $\mathcal{R}_{H_0}$ est **la région de rejet ou région critique** du test.
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{0\})$ noté $\mathcal{A}_{H_0}$ est **la région d'acceptation** du test.

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

Fonction de test

Définition

- On appelle **fonction de test** toute statistique $\varphi : \mathcal{H}^n \to \{0,1\}$
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{1\})$ noté $\mathcal{R}_{H_0}$ est **la région de rejet ou région critique** du test.
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{0\})$ noté $\mathcal{A}_{H_0}$ est **la région d'acceptation** du test.

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

Fonction de test

Définition

- On appelle **fonction de test** toute statistique $\varphi : \mathcal{H}^n \to \{0,1\}$
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{1\})$ noté $\mathcal{R}_{H_0}$ est **la région de rejet ou région critique** du test.
- L'ensemble $\varphi^{-1}(\{0\})$ noté $\mathcal{A}_{H_0}$ est **la région d'acceptation** du test.

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Erreurs de décision

		Réalité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	OK	erreur de deuxième espèce
	H_1	erreur de première espèce	OK

- Le **risque de première espèce d'un test** φ est la fonction

$$\begin{aligned}\alpha : \Theta_0 &\to [0,1] \\ \theta_0 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}_{H_0})\end{aligned}$$

- Le **risque de deuxième espèce d'un test** φ est la fonction

$$\begin{aligned}\beta : \Theta_1 &\to [0,1] \\ \theta_1 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{A}_{H_0})\end{aligned}$$

Erreurs de décision

		Réalité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	OK	erreur de deuxième espèce
	H_1	erreur de première espèce	OK

- Le **risque de première espèce d'un test** φ est la fonction

$$\alpha : \Theta_0 \to [0,1]$$
$$\theta_0 \mapsto \mathbf{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}_{H_0})$$

- Le **risque de deuxième espèce d'un test** φ est la fonction

$$\beta : \Theta_1 \to [0,1]$$
$$\theta_1 \mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{A}_{H_0})$$

Erreurs de décision

		Réalité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	OK	erreur de deuxième espèce
	H_1	erreur de première espèce	OK

- Le **risque de première espèce d'un test** φ est la fonction

$$\begin{aligned} \alpha : \Theta_0 &\to [0,1] \\ \theta_0 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_0}(\mathcal{R}_{H_0}) \end{aligned}$$

- Le **risque de deuxième espèce d'un test** φ est la fonction

$$\begin{aligned} \beta : \Theta_1 &\to [0,1] \\ \theta_1 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{A}_{H_0}) \end{aligned}$$

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

- **Risque de première espèce :**

$$\alpha = \mathbf{P}_{H_0}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}) = \mathbf{P}_{H_0}(\bar{X}_n > s_0) = 1 - F_{3,0.1}(s_0)$$

- **Risque de deuxième espèce :**

$$\beta = \mathbf{P}_{H_1}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}) = F_{3.5,0.1}(s_0).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

- **Risque de première espèce :**

$$\alpha = \mathbf{P}_{H_0}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}) = \mathbf{P}_{H_0}(\bar{X}_n > s_0) = 1 - F_{3,0.1}(s_0)$$

- **Risque de deuxième espèce :**

$$\beta = \mathbf{P}_{H_1}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}) = F_{3.5,0.1}(s_0).$$

Exemple

- $\mathbf{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, 1)$, $n = 10$.
- $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu = 3.5$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}$.
- $\mathcal{A}_{H_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}$.

- **Risque de première espèce :**

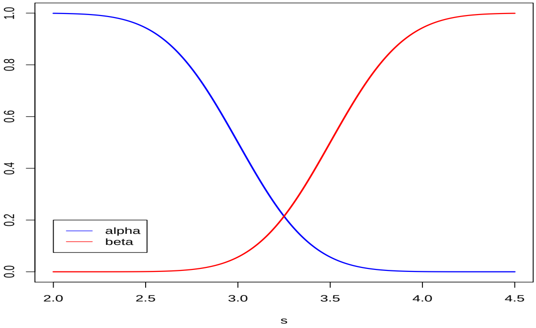
$$\alpha = \mathbf{P}_{H_0}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > s_0\}) = \mathbf{P}_{H_0}(\bar{X}_n > s_0) = 1 - F_{3,0.1}(s_0)$$

- **Risque de deuxième espèce :**

$$\beta = \mathbf{P}_{H_1}(\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq s_0\}) = F_{3.5,0.1}(s_0).$$

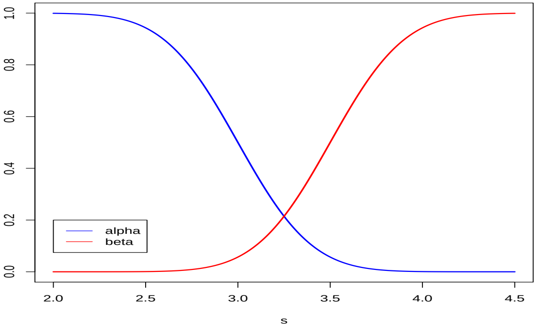
Une idée

- Choisir les ensembles $\mathcal{R}_{H_0}$ et $\mathcal{A}_{H_0}$ qui minimisent les risques α et β.
- Si $\mathcal{A}_{H_0} = \mathcal{H}^n$ alors $\mathcal{R}_{H_0} = \emptyset$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.
- Si $\mathcal{A}_{H_0} = \emptyset$ alors $\mathcal{R}_{H_0} = \mathcal{H}^n$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.
- Les risques α et β varient généralement en sens inverse.



Une idée

- Choisir les ensembles $\mathcal{R}_{H_0}$ et $\mathcal{A}_{H_0}$ qui minimisent les risques α et β.
- Si $\mathcal{A}_{H_0} = \mathcal{H}^n$ alors $\mathcal{R}_{H_0} = \emptyset$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.
- Si $\mathcal{A}_{H_0} = \emptyset$ alors $\mathcal{R}_{H_0} = \mathcal{H}^n$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.
- Les risques α et β varient généralement en sens inverse.



Le principe de Neyman et Pearson

- Neyman et Pearson (1933) proposent de traiter les risques de façon non symétrique.
- On fixe tout d'abord le risque maximal de première espèce $\alpha = \sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \alpha(\theta_0)$. Ce risque maximal est appelé **niveau du test**.

La procédure de Neyman et Pearson consiste à chercher dans l'ensemble des tests de niveau α un test optimal (dans le sens où son risque de deuxième espèce sera minimum).

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le principe de Neyman et Pearson

- Neyman et Pearson (1933) proposent de traiter les risques de façon non symétrique.
- On fixe tout d'abord le risque maximal de première espèce $\alpha = \sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \alpha(\theta_0)$. Ce risque maximal est appelé **niveau du test**.

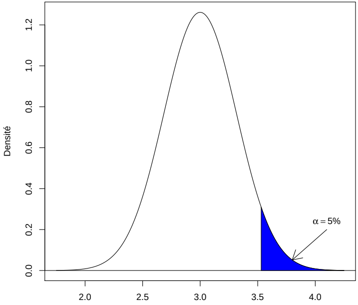
La procédure de Neyman et Pearson consiste à chercher dans l'ensemble des tests de niveau α un test optimal (dans le sens où son risque de deuxième espèce sera minimum).

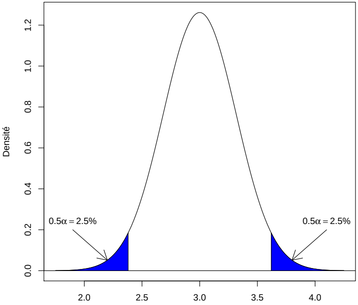
UNIVERSITÉ RENNES 2

- $\mathbf{P}_\theta = N(\mu, 1)$, $n = 10$, $H_0 = 3$ contre $H_1 = 3.5$
- Sous H_0 : $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(3, \frac{1}{n})$.

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{1}_{\bar{x}_n > s}$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{1}_{s_0 \leq \bar{x}_n \leq s_1}$$





$\beta = \mathbf{P}_{H_1}(\bar{X}_n \leq 3.52) \simeq 0.525.$

$\beta = \mathbf{P}_{H_1}(2.38 \leq \bar{X}_n \leq 3.62) \simeq 0.648.$

En pratique

La construction d'un test de niveau α se compose des étapes suivantes :

1. Détermination des **hypothèses** H_0 et H_1 à partir du problème posé.
2. Détermination d'une **statistique de test** et de la **forme de la fonction de test**.
3. Détermination précise des **constantes** intervenant dans la fonction de test de sorte que le niveau du test soit α.
4. **Conclusion** au vu de l'observation.

Dissymétrie des hypothèses...

- H_0 et H_1 ne jouent pas des roles symétriques.
- En pratique le seul risque controlé est le risque de première espèce (fixé à α), H_0 est ainsi l'hypothèse à privilégier, il faut en tenir compte dans le choix des hypothèses.

Exemple

1. Mise en circulation d'un nouveau médicament :

$$H_0 : p_N = p_A \quad \text{contre} \quad H_1 : p_N > p_A .$$

2. Procés d'assise $\Rightarrow$ H_0 : "innocent" contre H_1 : "coupable".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Dissymétrie des hypothèses...

- H_0 et H_1 ne jouent pas des roles symétriques.
- En pratique le seul risque controlé est le risque de première espèce (fixé à α), H_0 est ainsi l'hypothèse à privilégier, il faut en tenir compte dans le choix des hypothèses.

Exemple

1. Mise en circulation d'un nouveau médicament :

$$H_0 : p_N = p_A \quad \text{contre} \quad H_1 : p_N > p_A .$$

2. Procés d'assise $\Rightarrow$ H_0 : "innocent" contre H_1 : "coupable".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Dissymétrie des hypothèses...

- H_0 et H_1 ne jouent pas des roles symétriques.
- En pratique le seul risque controlé est le risque de première espèce (fixé à α), H_0 est ainsi l'hypothèse à privilégier, il faut en tenir compte dans le choix des hypothèses.

Exemple

1. Mise en circulation d'un nouveau médicament :

$$H_0 : p_N = p_A \quad \text{contre} \quad H_1 : p_N > p_A .$$

2. Procés d'assise $\Rightarrow$ H_0 : "innocent" contre H_1 : "coupable".

UNIVERSITÉ RENNES 2

Dissymétrie des hypothèses...

- H_0 et H_1 ne jouent pas des roles symétriques.
- En pratique le seul risque controlé est le risque de première espèce (fixé à α), H_0 est ainsi l'hypothèse à privilégier, il faut en tenir compte dans le choix des hypothèses.

Exemple

1. Mise en circulation d'un nouveau médicament :

$$H_0 : p_N = p_A \quad \text{contre} \quad H_1 : p_N > p_A.$$

2. Procés d'assise $\Rightarrow$ H_0 : "innocent" contre H_1 : "coupable".

UNIVERSITÉ RENNES 2

- H_0 et H_1 ne jouent pas des roles symétriques.
- En pratique le seul risque controlé est le risque de première espèce (fixé à α), H_0 est ainsi l'hypothèse à privilégier, il faut en tenir compte dans le choix des hypothèses.

Exemple

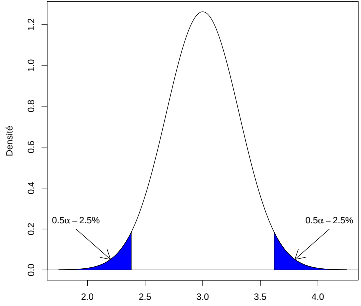
1. Mise en circulation d'un nouveau médicament :

$$H_0 : p_N = p_A \quad \text{contre} \quad H_1 : p_N > p_A.$$

2. Procés d'assise $\Rightarrow$ H_0 : "innocent" contre H_1 : "coupable".

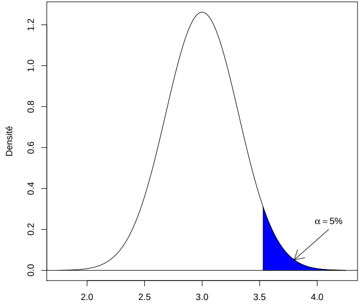
- H_0 doit être l'hypothèse à privilégier.
- Le choix de H_1 intervient dans le choix de la fonction de test (ou encore sur la forme de la zone de rejet du test)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq \mu_0$$



$$\mathcal{R}_{H_0} = \{]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[\}$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu > \mu_0$$



$$\mathcal{R}_{H_0} = \{]x, \infty[\}$$

Accepter-rejeter les hypothèses ?

- Sur l'exemple précédent, on voit que la décision est prise en étudiant la loi d'une **statistique de test sous H_0**.
- Pour décider, on regarde si la valeur observée t_{obs} de la statistique de test T tombe dans une zone "raisonnable" sous l'hypothèse nulle H_0.

Conclusion

- Si $t_{obs} \in \mathcal{A}_{H_0}$, on dit qu'on accepte l'hypothèse H_0 au niveau α.
- Si $t_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on dit qu'on rejette l'hypothèse H_0 au profit de H_1 au niveau α.

Accepter-rejeter les hypothèses ?

- Sur l'exemple précédent, on voit que la décision est prise en étudiant la loi d'une **statistique de test sous** H_0.
- Pour décider, on regarde si la valeur observée t_{obs} de la statistique de test T tombe dans une zone "raisonnable" sous l'hypothèse nulle H_0.

Conclusion

- Si $t_{obs} \in \mathcal{A}_{H_0}$, on dit qu'on accepte l'hypothèse H_0 au niveau α.
- Si $t_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on dit qu'on rejette l'hypothèse H_0 au profit de H_1 au niveau α.

Accepter-rejeter les hypothèses ?

- Sur l'exemple précédent, on voit que la décision est prise en étudiant la loi d'une **statistique de test sous** H_0.
- Pour décider, on regarde si la valeur observée t_{obs} de la statistique de test T tombe dans une zone "raisonnable" sous l'hypothèse nulle H_0.

Conclusion

- Si $t_{obs} \in \mathcal{A}_{H_0}$, on dit qu'on accepte l'hypothèse H_0 au niveau α.
- Si $t_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on dit qu'on rejette l'hypothèse H_0 au profit de H_1 au niveau α.

UNIVERSITÉ RENNES 2

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définitions

- On appelle **puissance d'un test** la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est effectivement fausse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \eta : \Theta_1 &\to [0,1] \\ \theta_1 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{R}_{H_0}) = 1 - \beta(\theta_1). \end{aligned}$$

- Soit φ_1 et φ_2 deux tests de niveau α. φ_1 est dit **uniformément plus puissant (UPP)** que φ_2 si

$$\forall \theta_1 \in \Theta_1 \qquad \eta_{\varphi_1}(\theta_1) \geq \eta_{\varphi_2}(\theta_1).$$

- Un test φ est dit **UPP** parmi les tests de niveau α si il est de niveau α et si il est UPP que tout test de niveau α.

Définitions

- On appelle **puissance d'un test** la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est effectivement fausse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \eta : \Theta_1 &\to [0,1] \\ \theta_1 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{R}_{H_0}) = 1 - \beta(\theta_1). \end{aligned}$$

- Soit φ_1 et φ_2 deux tests de niveau α. φ_1 est dit **uniformément plus puissant (UPP)** que φ_2 si

$$\forall \theta_1 \in \Theta_1 \qquad \eta_{\varphi_1}(\theta_1) \geq \eta_{\varphi_2}(\theta_1).$$

- Un test φ est dit **UPP** parmi les tests de niveau α si il est de niveau α et si il est UPP que tout test de niveau α.

Définitions

- On appelle **puissance d'un test** la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est effectivement fausse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\eta : \Theta_1 &\to [0,1] \\ \theta_1 &\mapsto \mathbf{P}_{\theta_1}(\mathcal{R}_{H_0}) = 1 - \beta(\theta_1).\end{aligned}$$

- Soit φ_1 et φ_2 deux tests de niveau α. φ_1 est dit **uniformément plus puissant (UPP)** que φ_2 si

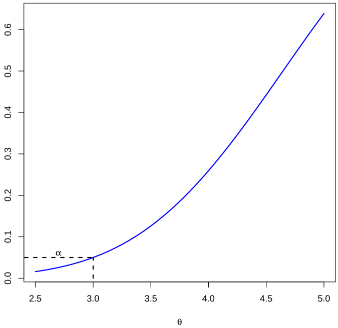
$$\forall \theta_1 \in \Theta_1 \qquad \eta_{\varphi_1}(\theta_1) \geq \eta_{\varphi_2}(\theta_1).$$

- Un test φ est dit **UPP** parmi les tests de niveau α si il est de niveau α et si il est UPP que tout test de niveau α.

Un test φ de niveau α est dit **sans biais** si pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$ on a $\eta_\varphi(\theta_1) \geq \alpha$.

Exemple

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, $H_0 : \mu = 3$, $H_1 : \mu > 3$, $\alpha = 0.05$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x : x > q_{0.95,3,1}\}$.
- $\eta(\mu) = 1 - F_{\mu,1}(q_{0.95,3,1})$ pour $\mu > 3$.

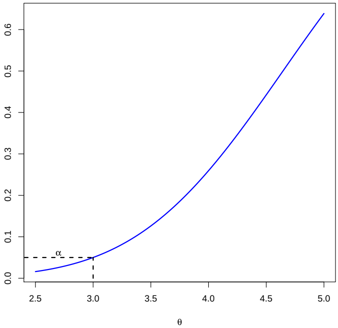


Le test est sans biais.

Un test φ de niveau α est dit **sans biais** si pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$ on a $\eta_\varphi(\theta_1) \geq \alpha$.

Exemple

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, $H_0 : \mu = 3$, $H_1 : \mu > 3$, $\alpha = 0.05$.
- $\mathcal{R}_{H_0} = \{x : x > q_{0.95,3,1}\}$.
- $\eta(\mu) = 1 - F_{\mu,1}(q_{0.95,3,1})$ pour $\mu > 3$.



Le test est sans biais.

Test sur la moyenne d'une loi gaussienne

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ avec $n = 10$. On souhaite tester $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu \neq 3$ au niveau $\alpha = 5\%$.
- Statistique de test :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Sous H_0 :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 3) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- On déduit

$$\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, q_{0.025}[\cup]q_{0.975}, +\infty[=]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[.$$

- On rejette H_0 au niveau 5% si $T_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Test sur la moyenne d'une loi gaussienne

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ avec $n = 10$. On souhaite tester $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu \neq 3$ au niveau $\alpha = 5\%$.
- Statistique de test :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Sous H_0 :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 3) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- On déduit

$$\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, q_{0.025}[\cup]q_{0.975}, +\infty[=]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[.$$

- On rejette H_0 au niveau 5% si $T_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$.

Test sur la moyenne d'une loi gaussienne

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ avec $n = 10$. On souhaite tester $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu \neq 3$ au niveau $\alpha = 5\%$.
- Statistique de test :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Sous H_0 :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 3) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- On déduit

$$\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, q_{0.025}[\cup]q_{0.975}, +\infty[=]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[.$$

- On rejette H_0 au niveau 5% si $T_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$.

Test sur la moyenne d'une loi gaussienne

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ avec $n = 10$. On souhaite tester $H_0 : \mu = 3$ contre $H_1 : \mu \neq 3$ au niveau $\alpha = 5\%$.
- Statistique de test :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Sous H_0 :

$$T = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 3) \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- On déduit

$$\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, q_{0.025}[\cup]q_{0.975}, +\infty[=]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[.$$

- On rejette H_0 au niveau 5% si $T_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Tests sur une moyenne - échantillons gaussiens

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$	$\{x : x > q_{1-\alpha}\}$	UPP
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$	$\{x : x < q_{\alpha/2} \text{ ou } x > q_{1-\alpha/2}\}$	UPPSB

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}$	$\{x : x > t_{1-\alpha}\}$	UPP
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}$	$\{x : x < t_{\alpha/2} \text{ ou } x > t_{1-\alpha/2}\}$	UPPSB

Tests sur une moyenne - échantillons gaussiens

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 connu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$	$\{x : x > q_{1-\alpha}\}$	UPP
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}$	$\{x : x < q_{\alpha/2} \text{ ou } x > q_{1-\alpha/2}\}$	UPPSB

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec σ^2 inconnu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}$	$\{x : x > t_{1-\alpha}\}$	UPP
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}$	$\{x : x < t_{\alpha/2} \text{ ou } x > t_{1-\alpha/2}\}$	UPPSB

Tests sur une variance - échantillons gaussiens

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ connu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x > \chi^2_{1-\alpha}(n)\}$	"UPP"
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x < \chi^2_{\alpha/2}(n)$ ou $x > \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\}$	"UPPSB"

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$	"UPP"
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ ou $x > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$	"UPPSB"

Tests sur une variance - échantillons gaussiens

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ connu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x > \chi^2_{1-\alpha}(n)\}$	"UPP"
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x < \chi^2_{\alpha/2}(n) \text{ ou } x > \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\}$	"UPPSB"

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu.

H_0	H_1	Stat de test	$\mathcal{R}_{H_0}$	Propriétés
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$	"UPP"
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$	$\{x : x < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ ou }$ $x > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}$	"UPPSB"

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

- On dispose de $n_1 = 13$ observations du poids de poulpes femelles et $n_2 = 15$ observations du poids de poulpes males.
- On souhaite vérifier si le sexe a une influence sur le poids.

Modélisation

- X_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe femelle, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- Y_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe male, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- On souhaiter tester les hypothèses $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Exemple

- On dispose de $n_1 = 13$ observations du poids de poulpes femelles et $n_2 = 15$ observations du poids de poulpes males.
- On souhaite vérifier si le sexe a une influence sur le poids.

Modélisation

- X_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe femelle, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- Y_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe male, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- On souhaiter tester les hypothèses $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Exemple

- On dispose de $n_1 = 13$ observations du poids de poulpes femelles et $n_2 = 15$ observations du poids de poulpes males.
- On souhaite vérifier si le sexe a une influence sur le poids.

Modélisation

- X_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe femelle, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- Y_i v.a. correspondant au poids du $i^{\text{ème}}$ poulpe male, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- On souhaiter tester les hypothèses $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Les statistiques de test

	σ_i connus		σ_i inconnus	
	$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$
Stat de test	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$
Lois sous H_0	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{T}(n_1+n_2-2)$	$\simeq \mathcal{N}(0,1)$

Test de comparaison de variances

- $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. On note
  - $\widehat{\sigma_1^2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2$ et $\widehat{\sigma_2^2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2$
  - $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$ et $S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$

μ_1 et μ_2 connus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\widehat{\sigma_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1, n_2)$.

μ_1 et μ_2 inconnus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{S_1^2}}{\widehat{S_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Test de comparaison de variances

- $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. On note
  - $\widehat{\sigma_1^2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2$ et $\widehat{\sigma_2^2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2$
  - $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$ et $S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$

μ_1 et μ_2 connus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\widehat{\sigma_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1, n_2)$.

μ_1 et μ_2 inconnus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{S_1^2}}{\widehat{S_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Test de comparaison de variances

- $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. On note
  - $\widehat{\sigma_1^2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2$ et $\widehat{\sigma_2^2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \mu_2)^2$
  - $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$ et $S_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$

μ_1 et μ_2 connus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{\sigma_1^2}}{\widehat{\sigma_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1, n_2)$.

μ_1 et μ_2 inconnus

Sous H_0 la statistique $\frac{\widehat{S_1^2}}{\widehat{S_2^2}}$ suit une loi de Fisher $\mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple des pouples avec R

- Test d'égalité des variances.

```
> var.test(Poids~Sexe,conf.level=0.95,data=poulpes)

F test to compare two variances

data:  Poids by Sexe
F = 0.2883, num df = 12, denom df = 14,  p-value = 0.03713
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.0945296 0.9244467
sample estimates:
ratio of variances
         0.2883299
```

La fonction ne renvoie pas la décision mais une **p-value** (**valeur-p** en français) également appelée **probabilité critique**.

Exemple des pouples avec R

- Test d'égalité des variances.

```
> var.test(Poids~Sexe,conf.level=0.95,data=poulpes)

F test to compare two variances

data:  Poids by Sexe
F = 0.2883, num df = 12, denom df = 14,  p-value = 0.03713
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.0945296 0.9244467
sample estimates:
ratio of variances
         0.2883299
```

La fonction ne renvoie pas la décision mais une **p-value** (**valeur-p** en français) également appelée **probabilité critique**.

Probabilité critique

Définition

La **probabilité critique** est la probabilité que sous H_0 la statistique de test prenne une valeur au moins aussi extrême que celle observée.

Calcul de la pc

On note T la statistique de test et t_{obs} la valeur observée.

- Si la région de rejet est unilatérale, par exemple $\{x : x > c\}$ alors $pc = \mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs})$.
- Si la région de rejet est bilatérale, par exemple $\{x : x > c_1 \text{ ou } x < c_2\}$ alors

$$pc = \begin{cases} 2\mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs}) & \text{si } t_{obs} > M \\ 2\mathbf{P}_{H_0}(T < t_{obs}) & \text{si } t_{obs} < M \end{cases}$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Probabilité critique

Définition

La **probabilité critique** est la probabilité que sous H_0 la statistique de test prenne une valeur au moins aussi extrême que celle observée.

Calcul de la pc

On note T la statistique de test et t_{obs} la valeur observée.

- Si la région de rejet est unilatérale, par exemple $\{x : x > c\}$ alors $pc = \mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs})$.
- Si la région de rejet est bilatérale, par exemple $\{x : x > c_1 \text{ ou } x < c_2\}$ alors

$$pc = \begin{cases} 2\mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs}) & \text{si } t_{obs} > M \\ 2\mathbf{P}_{H_0}(T < t_{obs}) & \text{si } t_{obs} < M \end{cases}$$

Probabilité critique

Définition

La **probabilité critique** est la probabilité que sous H_0 la statistique de test prenne une valeur au moins aussi extrême que celle observée.

Calcul de la pc

On note T la statistique de test et t_{obs} la valeur observée.

- Si la région de rejet est unilatérale, par exemple $\{x : x > c\}$ alors $pc = \mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs})$.
- Si la région de rejet est bilatérale, par exemple $\{x : x > c_1 \text{ ou } x < c_2\}$ alors

$$pc = \begin{cases} 2\mathbf{P}_{H_0}(T > t_{obs}) & \text{si } t_{obs} > M \\ 2\mathbf{P}_{H_0}(T < t_{obs}) & \text{si } t_{obs} < M \end{cases}$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Interprétation de la probabilité critique

- La probabilté critique correspond au niveau de test minimum pour lequel on rejette H_0. Ainsi,
  - si $pc \geq \alpha$ l'hypothèse nulle est acceptée au niveau α.
  - si $pc < \alpha$ l'hypothèse nulle est rejetée au niveau α.

En pratique...

- Les logiciels ne renvoient généralement pas la conclusion du test mais la valeur de la probabilité critique.
- La décision est prise en comparant cette valeur au niveau fixé par l'utilisateur.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Interprétation de la probabilité critique

- La probabilté critique correspond au niveau de test minimum pour lequel on rejette H_0. Ainsi,
  - si $pc \geq \alpha$ l'hypothèse nulle est acceptée au niveau α.
  - si $pc < \alpha$ l'hypothèse nulle est rejetée au niveau α.

En pratique...

- Les logiciels ne renvoient généralement pas la conclusion du test mais la valeur de la probabilité critique.
- La décision est prise en comparant cette valeur au niveau fixé par l'utilisateur.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Interprétation de la probabilité critique

- La probabilté critique correspond au niveau de test minimum pour lequel on rejette H_0. Ainsi,
  - si $pc \geq \alpha$ l'hypothèse nulle est acceptée au niveau α.
  - si $pc < \alpha$ l'hypothèse nulle est rejetée au niveau α.

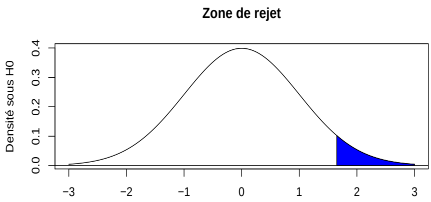
En pratique...

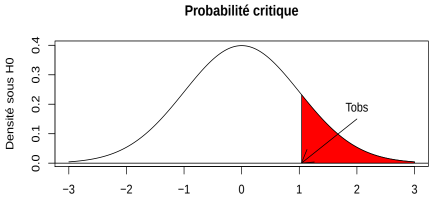
- Les logiciels ne renvoient généralement pas la conclusion du test mais la valeur de la probabilité critique.
- La décision est prise en comparant cette valeur au niveau fixé par l'utilisateur.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple pour un test unilatéral

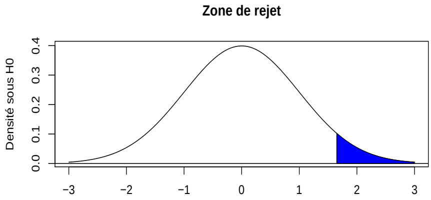
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
- $\alpha = 0.05$.
- $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sous H_0.



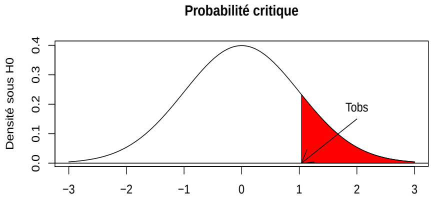


Conclusion : $pc > \alpha$ donc H_0 est acceptée au niveau 5%.

Exemple pour un test unilatéral



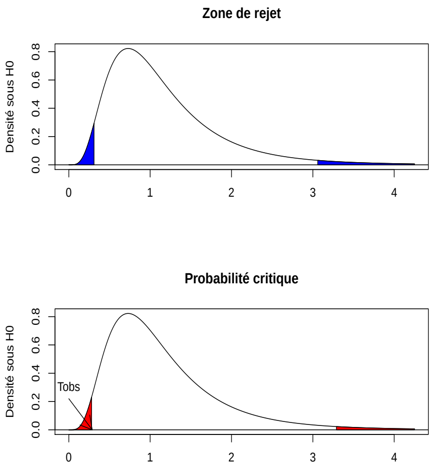
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
- $\alpha = 0.05$.
- $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sous H_0.



Conclusion : $pc > \alpha$ donc H_0 est acceptée au niveau 5%.

Exemple pour un test bilatéral

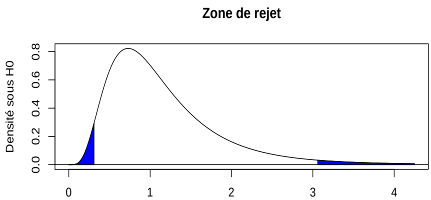
- Test d'égalité des variances pour les poulpes.
- $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ vs $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- $\alpha = 0.05$.
- $T \sim \mathcal{F}(12, 14)$ sous H_0.

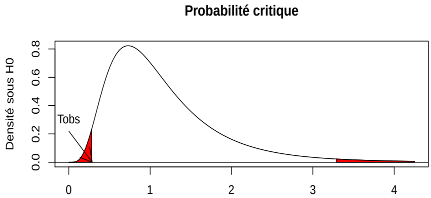


$pc \leq \alpha$ donc H_0 est rejetée au profit de H_1. On conclut que la variance de la variable poids diffère selon le sexe.

Exemple pour un test bilatéral

- Test d'égalité des variances pour les poulpes.
- $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ vs $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- $\alpha = 0.05$.
- $T \sim \mathcal{F}(12, 14)$ sous H_0.





$pc \leq \alpha$ donc H_0 est rejetée au profit de H_1. On conclut que la variance de la variable poids diffère selon le sexe.

Comparaison du poids moyen des poulpes

- Pour comparer la poids moyen des poulpes, on fait ainsi un test d'égalité de moyenne avec variances inégales.
- Sur R, on obtient

```
> t.test(Poids~Sexe,alternative="two.sided",conf.level=0.95,
                                        var.equal=FALSE,data=poulpes)

Welch Two Sample t-test

data:  Poids by Sexe
t = -3.7496, df = 22.021, p-value = 0.001107
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2010.624  -578.607
sample estimates:
mean in group Femelle    mean in group Male
             1405.385              2700.000
```

Au seuil $\alpha = 5\%$, on conlut que le poids des poulpes est différent selon le sexe.

Question

Que se passe-t-il si les paramètres que l'on souhaite tester ne sont pas gaussiens ?

Une réponse

Dans le cas où la paramètre à tester correspond à l'espérance d'une variable aléatoire, on utilise souvent l'approximation gaussienne via le TCL.

Nous illustrons cette approche à travers des exemples de tests de proportions.

Question

Que se passe-t-il si les paramètres que l'on souhaite tester ne sont pas gaussiens ?

Une réponse

Dans le cas où la paramètre à tester correspond à l'espérance d'une variable aléatoire, on utilise souvent l'approximation gaussienne via le TCL.

Nous illustrons cette approche à travers des exemples de tests de proportions.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Test sur le paramètre d'une loi de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi de Bernoulli p_0.
- $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$.
- TCL :

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- Sous H_0, on fait l'approximation :

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- On déduit $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -q_{1-\alpha/2}[\cup]q_{1-\alpha/2}, +\infty[$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Test sur le paramètre d'une loi de Bernoulli

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de loi de Bernoulli p_0.
- $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$.
- TCL :

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- Sous H_0, on fait l'approximation :

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- On déduit $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -q_{1-\alpha/2}[\cup]q_{1-\alpha/2}, +\infty[$.

Test sur le paramètre d'une loi de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi de Bernoulli p_0.
- $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \neq p_0$.
- TCL :

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- Sous H_0, on fait l'approximation :

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- On déduit $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -q_{1-\alpha/2}[\cup]q_{1-\alpha/2}, +\infty[$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

- **Modélisation :** on note p la probabilité de recruter une femme et X_i la va qui prend pour valeur 1 si la $i^{\text{ème}}$ personne recrutée est une femme, 0 sinon.
- $H_0 : p = 0.5$ contre $H_1 : p \neq 0.5$ au niveau $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0, la statistique

$$T = \sqrt{100}\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)}}$$

suit (approximativement) une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$.
- $T_{obs} = 2 \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au niveau 0.05 ($pc = 0.0455$).

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

- **Modélisation :** on note p la probabilité de recruter une femme et X_i la va qui prend pour valeur 1 si la $i^{\text{ème}}$ personne recrutée est une femme, 0 sinon.
- $H_0 : p = 0.5$ contre $H_1 : p \neq 0.5$ au niveau $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0, la statistique

$$T = \sqrt{100}\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)}}$$

suit (approximativement) une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- $\mathcal{R}_{H_0} =] - \infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$.
- $T_{obs} = 2 \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au niveau 0.05 ($pc = 0.0455$).

Exemple

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

- **Modélisation :** on note p la probabilité de recruter une femme et X_i la va qui prend pour valeur 1 si la $i^{\text{ème}}$ personne recrutée est une femme, 0 sinon.
- $H_0 : p = 0.5$ contre $H_1 : p \neq 0.5$ au niveau $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0, la statistique

$$T = \sqrt{100}\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)}}$$

suit (approximativement) une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$.
- $T_{obs} = 2 \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au niveau 0.05 ($pc = 0.0455$).

Exemple

- Une entreprise emploie 40 hommes et 60 femmes.

Peut-on affirmer que les recruteurs sont sexistes ?

- **Modélisation :** on note p la probabilité de recruter une femme et X_i la va qui prend pour valeur 1 si la $i^{\text{ème}}$ personne recrutée est une femme, 0 sinon.
- $H_0 : p = 0.5$ contre $H_1 : p \neq 0.5$ au niveau $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0, la statistique

$$T = \sqrt{100}\frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)}}$$

suit (approximativement) une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- $\mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$.
- $T_{obs} = 2 \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au niveau 0.05 ($pc = 0.0455$).

Test de comparaison de deux proportions

- $X_1, \dots, X_{n_1}$ i.i.d de loi $B(p_1)$.
- $Y_1, \dots, Y_{n_1}$ i.i.d de loi $B(p_2)$.
- $H_0 : p_1 = p_2$ contre $H_1 : p_1 \neq p_2$.
- On note $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$ et sous H_0 on approche la loi de

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

  par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- On rejettera donc H_0 si

$$t_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -q_{1-\alpha/2}[\cup]q_{1-\alpha/2}, +\infty[.$$

Test de comparaison de deux proportions

- $X_1, \dots, X_{n_1}$ i.i.d de loi $B(p_1)$.
- $Y_1, \dots, Y_{n_1}$ i.i.d de loi $B(p_2)$.
- $H_0 : p_1 = p_2$ contre $H_1 : p_1 \neq p_2$.
- On note $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$ et sous H_0 on approche la loi de

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

  par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
- On rejettera donc H_0 si

$$t_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0} =]-\infty, -q_{1-\alpha/2}[\cup]q_{1-\alpha/2}, +\infty[.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Motivations

- A un âge donné, on a pu observer que parmi les bébés non prématurés : 50% marchent, 12% ont une ébauche de marche et 38% ne marchent pas.
- Pour le même âge, sur 80 prématurés, on a observé que 35 marchent, 4 ont une ébauche de marche et 41 ne marchent pas.

Les bébés prématurés développent-ils la marche de la même manière que les bébés non-prématurés ?

- Exemple du nombre de garçons qui suit une loi Binomiale ?
- Dépendance entre le fait d'avoir survécu et la classe d'appartenance pour les passagers du Titanic.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Motivations

- A un âge donné, on a pu observer que parmi les bébés non prématurés : 50% marchent, 12% ont une ébauche de marche et 38% ne marchent pas.
- Pour le même âge, sur 80 prématurés, on a observé que 35 marchent, 4 ont une ébauche de marche et 41 ne marchent pas.

Les bébés prématurés développent-ils la marche de la même manière que les bébés non-prématurés ?

- Exemple du nombre de garçons qui suit une loi Binomiale ?
- Dépendance entre le fait d'avoir survécu et la classe d'appartenance pour les passagers du Titanic.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Tests non paramétriques

- On peut répondre à ces questions à l'aide de tests statistiques.
- Ici, le problème est de confronter la loi d'une variable à une autre loi, ou encore de tester l'indépendance entre deux variables.
- Les hypothèses ne vont plus porter sur les paramètres de lois de probabilités, c'est pourquoi on parle de **tests non paramétriques**.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Tests non paramétriques

- On peut répondre à ces questions à l'aide de tests statistiques.
- Ici, le problème est de confronter la loi d'une variable à une autre loi, ou encore de tester l'indépendance entre deux variables.
- Les hypothèses ne vont plus porter sur les paramètres de lois de probabilités, c'est pourquoi on parle de **tests non paramétriques**.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Tests non paramétriques

- On peut répondre à ces questions à l'aide de tests statistiques.
- Ici, le problème est de confronter la loi d'une variable à une autre loi, ou encore de tester l'indépendance entre deux variables.
- Les hypothèses ne vont plus porter sur les paramètres de lois de probabilités, c'est pourquoi on parle de **tests non paramétriques**.

La distance du χ^2

- Soit $X_1, \dots, X_n$ n va réelles de loi P. On note $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$.
- Soit $(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m)$ une partition de $\mathbb{R}$, on note $p_k = \mathbf{P}(X_1 \in \mathcal{O}_k)$.
- Soit $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in \mathcal{O}_k}$.

Définition

La distance du χ^2 entre P et P_n est définie par

$$D(P_n, P) = \sum_{k=1}^m \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Théorème

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$D(P_n, P) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(m-1).$$

La distance du χ^2

- Soit $X_1, \dots, X_n$ n va réelles de loi P. On note $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$.
- Soit $(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m)$ une partition de $\mathbb{R}$, on note $p_k = \mathbf{P}(X_1 \in \mathcal{O}_k)$.
- Soit $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in \mathcal{O}_k}$.

Définition

La distance du χ^2 entre P et P_n est définie par

$$D(P_n, P) = \sum_{k=1}^m \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Théorème

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$D(P_n, P) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(m-1).$$

La distance du χ^2

- Soit $X_1, \dots, X_n$ n va réelles de loi P. On note $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$.
- Soit $(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m)$ une partition de $\mathbb{R}$, on note $p_k = \mathbf{P}(X_1 \in \mathcal{O}_k)$.
- Soit $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in \mathcal{O}_k}$.

Définition

La distance du χ^2 entre P et P_n est définie par

$$D(P_n, P) = \sum_{k=1}^m \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Théorème

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$D(P_n, P) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(m-1).$$

Remarques

- $D(P_n, P)$ est une sorte de distance entre la loi empirique P_n et la loi théorique P.
- Elle est construite en comparant les effectifs observés N_k aux effectifs théoriques np_k.

Utile pour tester des hypothèses du genre $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$. En effet,

- Sous H_0, D_n aura tendance à ne pas prendre de trop grande valeurs puisque $N_k/n \stackrel{p.s.}{\to} p_k$ (LFGN).
- Sous H_1, D_n prendra de fortes valeurs puisque $D_n \stackrel{p.s.}{\to} \infty$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- $D(P_n, P)$ est une sorte de distance entre la loi empirique P_n et la loi théorique P.
- Elle est construite en comparant les effectifs observés N_k aux effectifs théoriques np_k.

Utile pour tester des hypothèses du genre $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$. En effet,

- Sous H_0, D_n aura tendance à ne pas prendre de trop grande valeurs puisque $N_k/n \stackrel{p.s.}{\to} p_k$ (LFGN).
- Sous H_1, D_n prendra de fortes valeurs puisque $D_n \stackrel{p.s.}{\to} \infty$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Remarques

- $D(P_n, P)$ est une sorte de distance entre la loi empirique P_n et la loi théorique P.
- Elle est construite en comparant les effectifs observés N_k aux effectifs théoriques np_k.

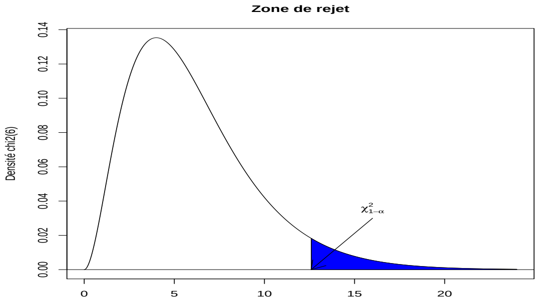
Utile pour tester des hypothèses du genre $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$. En effet,

- Sous H_0, D_n aura tendance à ne pas prendre de trop grande valeurs puisque $N_k/n \stackrel{p.s.}{\to} p_k$ (LFGN).
- Sous H_1, D_n prendra de fortes valeurs puisque $D_n \stackrel{p.s.}{\to} \infty$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le test d'adéquation du χ^2

- $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$.
- Sous H_0 la statistique $D(P_n, P_0) \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(m-1)$.
- $\mathcal{R}_{H_0} =]\chi^2_{1-\alpha}(m-1), +\infty[$.

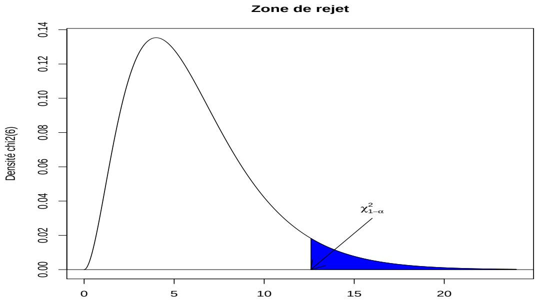


Remarque

Le test étant asymptotique, il est recommandé de l'appliquer pour $n > 30$ et $np_k^0 > 5$.

Le test d'adéquation du χ^2

- $H_0 : P = P_0$ contre $H_1 : P \neq P_0$.
- Sous H_0 la statistique $D(P_n, P_0) \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(m-1)$.
- $\mathcal{R}_{H_0} =]\chi^2_{1-\alpha}(m-1), +\infty[$.



Remarque

Le test étant asymptotique, il est recommandé de l'appliquer pour $n > 30$ et $np_k^0 > 5$.

Exemple

- X : "Marche à l'âge donné" pour les prématurés. 3 modalités (oui, ébauche, non).
- $H_0 : X \sim P_0$ contre $H_1 : X \nsim P_0$ avec $P_0(\text{oui}) = 0.5$, $P_0(\text{ébauche}) = 0.12$, $P_0(\text{non}) = 0.38$. Risque $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0 la statistique

$$D_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(2).$$

- $\mathcal{R}_{H_0} =]5.991, +\infty[$.

Exemple

- X : "Marche à l'âge donné" pour les prématurés. 3 modalités (oui, ébauche, non).
- $H_0 : X \sim P_0$ contre $H_1 : X \nsim P_0$ avec $P_0(\text{oui}) = 0.5$, $P_0(\text{ébauche}) = 0.12$, $P_0(\text{non}) = 0.38$. Risque $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0 la statistique

$$D_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(2).$$

- $\mathcal{R}_{H_0} =]5.991, +\infty[$.

Exemple

- X : "Marche à l'âge donné" pour les prématurés. 3 modalités (oui, ébauche, non).
- $H_0 : X \sim P_0$ contre $H_1 : X \nsim P_0$ avec $P_0(\text{oui}) = 0.5$, $P_0(\text{ébauche}) = 0.12$, $P_0(\text{non}) = 0.38$. Risque $\alpha = 0.05$.
- Sous H_0 la statistique

$$D_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \overset{\text{approx}}{\sim} \chi^2(2).$$

- $\mathcal{R}_{H_0} =]5.991, +\infty[$.

	oui	ébauche	non	Total
obs	35	4	41	80
théo	40	9.6	30.4	80
écart	0.625	3.267	3.696	**7.588**

- $D_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au risque 5% ($pc = 1 - F_{\chi^2_2}(7.588) = 0.0225$).
- Sur R, on peut réaliser le test avec les commandes

```
> x <- c(35,4,41)
> p0 <- c(0.5,0.12,0.38)
> chisq.test(x,p=p0)

Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 7.5877, df = 2, p-value = 0.02251
```

	oui	ébauche	non	Total
obs	35	4	41	80
théo	40	9.6	30.4	80
écart	0.625	3.267	3.696	**7.588**

- $D_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au risque 5% ($pc = 1 - F_{\chi^2_2}(7.588) = 0.0225$).
- Sur R, on peut réaliser le test avec les commandes

```
> x <- c(35,4,41)
> p0 <- c(0.5,0.12,0.38)
> chisq.test(x,p=p0)

Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 7.5877, df = 2, p-value = 0.02251
```

	oui	ébauche	non	Total
obs	35	4	41	80
théo	40	9.6	30.4	80
écart	0.625	3.267	3.696	**7.588**

- $D_{obs} \in \mathcal{R}_{H_0}$, on rejette H_0 au risque 5% ($pc = 1 - F_{\chi^2_2}(7.588) = 0.0225$).
- Sur R, on peut réaliser le test avec les commandes

```
> x <- c(35,4,41)
> p0 <- c(0.5,0.12,0.38)
> chisq.test(x,p=p0)

Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 7.5877, df = 2, p-value = 0.02251
```

Compléments

Propriété

Si la loi P_0 dépend de r paramètres, alors ces paramètres sont estimés (MV par exemple) et dans ce cas, sous H_0 $D(P_n, P_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{m-r-1}$.

Exemple du nombre de garçons

- $H_0 : X \sim B(4,p)$ contre $H_1 : X \nsim B(4,p)$.
- Estimateur de p : $\hat{p} = 0.4925$.

	0	1	2	3	4	Total
obs	3	30	39	23	5	100
théo	6.63	25.7	37.48	24.2	5.8	100

$D_{obs} = 2.95 \notin]7.81, +\infty[$. On accepte H_0 au risque 5%.

Propriété

Si la loi P_0 dépend de r paramètres, alors ces paramètres sont estimés (MV par exemple) et dans ce cas, sous H_0 $D(P_n, P_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{m-r-1}$.

Exemple du nombre de garçons

- $H_0 : X \sim B(4, p)$ contre $H_1 : X \nsim B(4, p)$.
- Estimateur de p : $\hat{p} = 0.4925$.

	0	1	2	3	4	Total
obs	3	30	39	23	5	100
théo	6.63	25.7	37.48	24.2	5.8	100

$D_{obs} = 2.95 \notin]7.81, +\infty[$. On accepte H_0 au risque 5%.

Compléments

Propriété

Si la loi P_0 dépend de r paramètres, alors ces paramètres sont estimés (MV par exemple) et dans ce cas, sous H_0 $D(P_n, P_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \chi^2_{m-r-1}$.

Exemple du nombre de garçons

- $H_0 : X \sim B(4, p)$ contre $H_1 : X \nsim B(4, p)$.
- Estimateur de p : $\hat{p} = 0.4925$.

	0	1	2	3	4	Total
obs	3	30	39	23	5	100
théo	6.63	25.7	37.48	24.2	5.8	100

$D_{obs} = 2.95 \notin]7.81, +\infty[$. On accepte H_0 au risque 5%.

Compléments

Propriété

Si la loi P_0 dépend de r paramètres, alors ces paramètres sont estimés (MV par exemple) et dans ce cas, sous H_0 $D(P_n, P_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{m-r-1}$.

Exemple du nombre de garçons

- $H_0 : X \sim B(4, p)$ contre $H_1 : X \nsim B(4, p)$.
- Estimateur de p : $\hat{p} = 0.4925$.

	0	1	2	3	4	Total
obs	3	30	39	23	5	100
théo	6.63	25.7	37.48	24.2	5.8	100

$D_{obs} = 2.95 \notin]7.81, +\infty[$. On accepte H_0 au risque 5%.

Notations

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F. On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne $(E_1, \dots, E_I)$ et $(F_1, \dots, F_J)$ deux partitions de E et F.
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

	F_1	$\dots$	F_j	$\dots$	F_J	Total
E_1	N_{11}	$\dots$	N_{1j}	$\dots$	N_{1J}	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_i	N_{i1}	$\dots$	N_{ij}	$\dots$	N_{iJ}	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_I	N_{I1}	$\dots$	N_{Ij}	$\dots$	N_{IJ}	$N_{I\bullet}$
Total	$N_{\bullet 1}$	$\dots$	$N_{\bullet j}$	$\dots$	$N_{\bullet J}$	n

Notations

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F. On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne $(E_1, \dots, E_I)$ et $(F_1, \dots, F_J)$ deux partitions de E et F.
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

	F_1	$\dots$	F_j	$\dots$	F_J	Total
E_1	N_{11}	$\dots$	N_{1j}	$\dots$	N_{1J}	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_i	N_{i1}	$\dots$	N_{ij}	$\dots$	N_{iJ}	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_I	N_{I1}	$\dots$	N_{Ij}	$\dots$	N_{IJ}	$N_{I\bullet}$
Total	$N_{\bullet 1}$	$\dots$	$N_{\bullet j}$	$\dots$	$N_{\bullet J}$	n

Notations

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F. On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne $(E_1, \dots, E_I)$ et $(F_1, \dots, F_J)$ deux partitions de E et F.
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

	F_1	$\dots$	F_j	$\dots$	F_J	Total
E_1	N_{11}	$\dots$	N_{1j}	$\dots$	N_{1J}	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_i	N_{i1}	$\dots$	N_{ij}	$\dots$	N_{iJ}	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_I	N_{I1}	$\dots$	N_{Ij}	$\dots$	N_{IJ}	$N_{I\bullet}$
Total	$N_{\bullet 1}$	$\dots$	$N_{\bullet j}$	$\dots$	$N_{\bullet J}$	n

Notations

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F. On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne $(E_1, \dots, E_I)$ et $(F_1, \dots, F_J)$ deux partitions de E et F.
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

	F_1	$\dots$	F_j	$\dots$	F_J	Total
E_1	N_{11}	$\dots$	N_{1j}	$\dots$	N_{1J}	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_i	N_{i1}	$\dots$	N_{ij}	$\dots$	N_{iJ}	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$
E_I	N_{I1}	$\dots$	N_{Ij}	$\dots$	N_{IJ}	$N_{I\bullet}$
Total	$N_{\bullet 1}$	$\dots$	$N_{\bullet j}$	$\dots$	$N_{\bullet J}$	n

Le test

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n} - N_{ij}\right)^2}{\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

- Au niveau α, on rejettera l'hypothèse H_0 si X_{obs} est supérieure au quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.
- Le test étant asymptotique, il faudra s'assurer en pratique que $n > 30$ et $\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n} > 5$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le test

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\frac{N_{I\bullet} N_{\bullet J}}{n} - N_{ij}\right)^2}{\frac{N_{I\bullet} N_{\bullet J}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

- Au niveau α, on rejettera l'hypothèse H_0 si X_{obs} est supérieure au quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.
- Le test étant asymptotique, il faudra s'assurer en pratique que $n > 30$ et $\frac{N_{I\bullet} N_{\bullet J}}{n} > 5$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n} - N_{ij}\right)^2}{\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

- Au niveau α, on rejettera l'hypothèse H_0 si X_{obs} est supérieure au quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.
- Le test étant asymptotique, il faudra s'assurer en pratique que $n > 30$ et $\frac{N_{I\bullet}N_{\bullet J}}{n} > 5$.

L'exemple du Titanic

- X : survécu ou pas, Y : classe.
- H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".

Effectifs observés

	1	2	3	E	Total
oui	203	118	178	212	711
non	122	167	528	673	1490
Total	325	285	706	885	2201

Effectifs Théoriques

	1	2	3	E	Total
oui	105	92	228	286	711
non	220	192	478	599	1490
Total	325	285	706	885	2201

$X_{obs} = 190.4011 > 0.352 = \chi^2_{0.95}(3)$, l'hypothèse nulle est donc (clairement !) rejetée au niveau α.

L'exemple du Titanic

- X : survécu ou pas, Y : classe.
- H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".

Effectifs observés

	1	2	3	E	Total
oui	203	118	178	212	711
non	122	167	528	673	1490
Total	325	285	706	885	2201

Effectifs Théoriques

	1	2	3	E	Total
oui	105	92	228	286	711
non	220	192	478	599	1490
Total	325	285	706	885	2201

$X_{obs} = 190.4011 > 0.352 = \chi^2_{0.95}(3)$, l'hypothèse nulle est donc (clairement !) rejetée au niveau α.

UNIVERSITÉ RENNES 2

L'exemple du Titanic

- X : survécu ou pas, Y : classe.
- H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".

Effectifs observés

	1	2	3	E	Total
oui	203	118	178	212	711
non	122	167	528	673	1490
Total	325	285	706	885	2201

Effectifs Théoriques

	1	2	3	E	Total
oui	105	92	228	286	711
non	220	192	478	599	1490
Total	325	285	706	885	2201

$X_{obs} = 190.4011 > 0.352 = \chi^2_{0.95}(3)$, l'hypothèse nulle est donc (clairement !) rejetée au niveau α.

L'exemple du Titanic

- X : survécu ou pas, Y : classe.
- H_0 : "X et Y sont indépendantes" contre H_1 : "X et Y ne sont pas indépendantes".

Effectifs observés

	1	2	3	E	Total
oui	203	118	178	212	711
non	122	167	528	673	1490
Total	325	285	706	885	2201

Effectifs Théoriques

	1	2	3	E	Total
oui	105	92	228	286	711
non	220	192	478	599	1490
Total	325	285	706	885	2201

$X_{obs} = 190.4011 > 0.352 = \chi^2_{0.95}(3)$, l'hypothèse nulle est donc (clairement !) rejetée au niveau α.

Cinquième partie V

Le modèle de régression linéaire

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le problème de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$.
- Il s'agit de trouver une fonction $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que $Y \approx m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$.
- Sauf cas (très) particulier, le lien n'est jamais "parfait"

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon.$$

Modèle de régression

- Poser un modèle de régression revient à supposer que la fonction m appartient à un certain espace $\mathcal{M}$.
- Le problème du statisticien sera alors de trouver la "meilleure" fonction dans $\mathcal{M}$ à l'aide d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le problème de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$.
- Il s'agit de trouver une fonction $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que $Y \approx m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$.
- Sauf cas (très) particulier, le lien n'est jamais "parfait"

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon.$$

Modèle de régression

- Poser un modèle de régression revient à supposer que la fonction m appartient à un certain espace $\mathcal{M}$.
- Le problème du statisticien sera alors de trouver la "meilleure" fonction dans $\mathcal{M}$ à l'aide d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le problème de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$.
- Il s'agit de trouver une fonction $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que $Y \approx m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$.
- Sauf cas (très) particulier, le lien n'est jamais "parfait"

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon.$$

Modèle de régression

- Poser un modèle de régression revient à supposer que la fonction m appartient à un certain espace $\mathcal{M}$.
- Le problème du statisticien sera alors de trouver la "meilleure" fonction dans $\mathcal{M}$ à l'aide d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Le problème de régression

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$.
- Il s'agit de trouver une fonction $m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que $Y \approx m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$.
- Sauf cas (très) particulier, le lien n'est jamais "parfait"

$$Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon.$$

Modèle de régression

- Poser un modèle de régression revient à supposer que la fonction m appartient à un certain espace $\mathcal{M}$.
- Le problème du statisticien sera alors de trouver la "meilleure" fonction dans $\mathcal{M}$ à l'aide d'un n-échantillon i.i.d. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple de modèles

Modèle non paramétrique

- L'espace $\mathcal{M}$ est de dimension infinie.
- **Exemple** : On pose $Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$ où m appartient à l'espace des fonctions continues.

Modèle paramétrique

- L'espace $\mathcal{M}$ est de dimension finie.
- **Exemple** : on suppose que la fonction m est linéaire

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \ldots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon.$$

  Le problème est alors d'estimer $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.
- C'est le modèle de **régression linéaire**.

Exemple de modèles

Modèle non paramétrique

- L'espace $\mathcal{M}$ est de dimension infinie.
- **Exemple** : On pose $Y = m(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$ où m appartient à l'espace des fonctions continues.

Modèle paramétrique

- L'espace $\mathcal{M}$ est de dimension finie.
- **Exemple** : on suppose que la fonction m est linéaire

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{X}_1 + \dots + \beta_p \mathbf{X}_p + \varepsilon.$$

  Le problème est alors d'estimer $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ à l'aide de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.
- C'est le modèle de **régression linéaire**.

RENNES 2

Exemple

- On cherche à **expliquer** ou à **prédire** la concentration en ozone.
- On dispose de $n = 112$ observations de la concentration en ozone ainsi que de 12 autres variables susceptibles d'expliquer cette concentration :
  - Température relevée à différents moments de la journée.
  - Indice de nébulosité relevé à différents moments de la journée.
  - Direction du vent.
  - Pluie.

Question

Comment expliquer (modéliser) la concentration en ozone à l'aide de toutes ces variables ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Exemple

- On cherche à **expliquer** ou à **prédire** la concentration en ozone.

- On dispose de $n = 112$ observations de la concentration en ozone ainsi que de 12 autres variables susceptibles d'expliquer cette concentration :
  - Température relevée à différents moments de la journée.
  - Indice de nébulosité relevé à différents moments de la journée.
  - Direction du vent.
  - Pluie.

Question

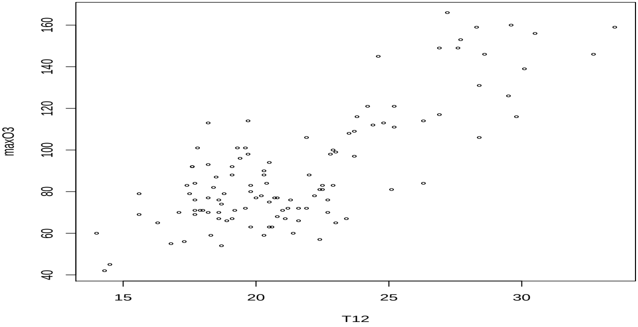
Comment expliquer (modéliser) la concentration en ozone à l'aide de toutes ces variables ?

Ozone en fonction de la température à 12h ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
T12	18.5	18.4	17.6	19.7	20.5	19.8	...

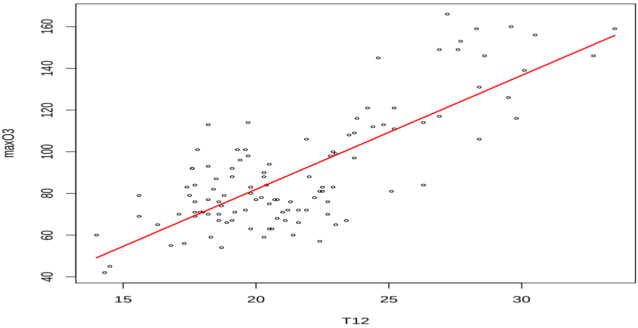
Ozone en fonction de la température à 12h ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
T12	18.5	18.4	17.6	19.7	20.5	19.8	...



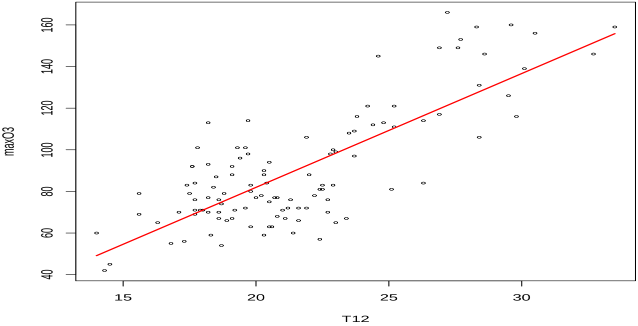
Ozone en fonction de la température à 12h ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
T12	18.5	18.4	17.6	19.7	20.5	19.8	...



Ozone en fonction de la température à 12h ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
T12	18.5	18.4	17.6	19.7	20.5	19.8	...



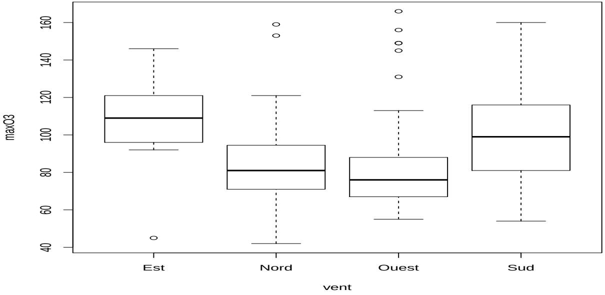
Comment ajuster le nuage de points ?

Ozone en fonction du vent ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
Vent	Nord	Nord	Est	Nord	Ouest	Ouest	...

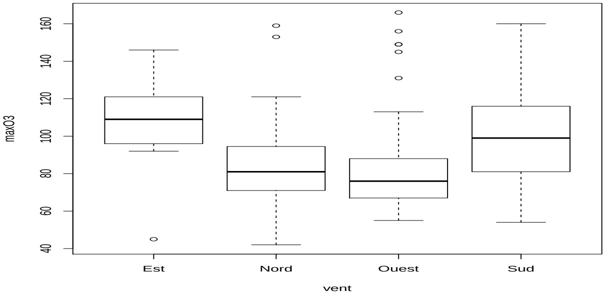
Ozone en fonction du vent ?

MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
Vent	Nord	Nord	Est	Nord	Ouest	Ouest	...



Ozone en fonction du vent ?

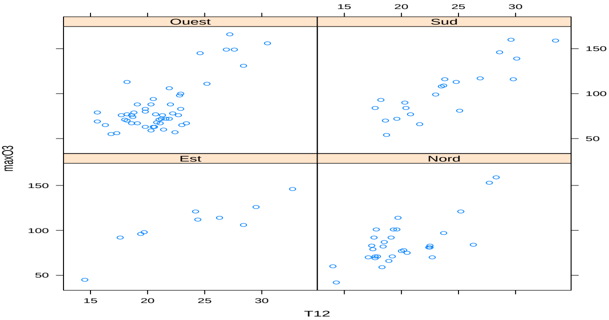
MaxO3	87	82	92	114	94	80	...
Vent	Nord	Nord	Est	Nord	Ouest	Ouest	...



$$MaxO3 \approx \alpha_1 \mathbf{1}_{Vent=est} + \ldots + \alpha_4 \mathbf{1}_{Vent=sud}.$$

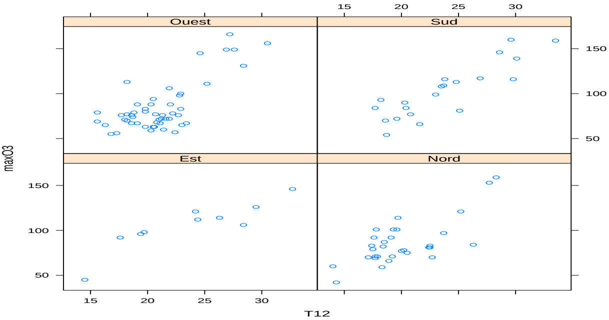
$$\alpha_j = ???$$

Ozone en fonction de la température à 12h et du vent ?



$$maxO3 \approx \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11} T12 & \text{si vent=est} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{04} + \beta_{14} T12 & \text{si vent=ouest} \end{cases}$$

Ozone en fonction de la température à 12h et du vent ?



$$maxO3 \approx \begin{cases} \beta_{01} + \beta_{11} T12 & \text{si vent=est} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{04} + \beta_{14} T12 & \text{si vent=ouest} \end{cases}$$

Autre modélisation

- Généralisation

$$maxO3 \approx \beta_0 + \beta_1 V_1 + \ldots + \beta_{12} V_{12}$$

Questions

- Comment calculer (ou plutôt **estimer**) les paramètres β_j ?
- Le modèle avec les 12 variables est-il "meilleur" que des modèles avec moins de variables ?
- Comment trouver le "meilleur" sous-groupe de variables ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Autre modélisation

- Généralisation

$$maxO3 \approx \beta_0 + \beta_1 V_1 + \ldots + \beta_{12} V_{12}$$

Questions

- Comment calculer (ou plutôt **estimer**) les paramètres β_j ?
- Le modèle avec les 12 variables est-il "meilleur" que des modèles avec moins de variables ?
- Comment trouver le "meilleur" sous-groupe de variables ?

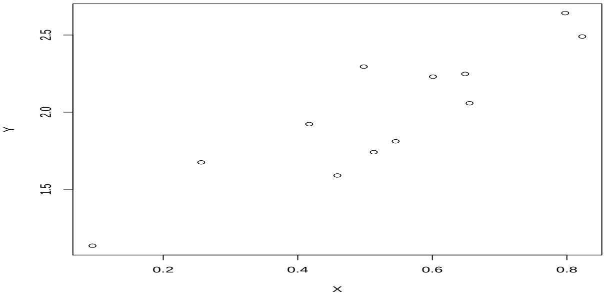
UNIVERSITÉ RENNES 2

Notations

- n observations $y_1, \dots, y_n$ de la **variable à expliquer** (maxO3).
- n observations $x_1, \dots, x_n$ de la **variable explicative** (T12).

Notations

- n observations $y_1, \ldots, y_n$ de la **variable à expliquer** (maxO3).
- n observations $x_1, \ldots, x_n$ de la **variable explicative** (T12).

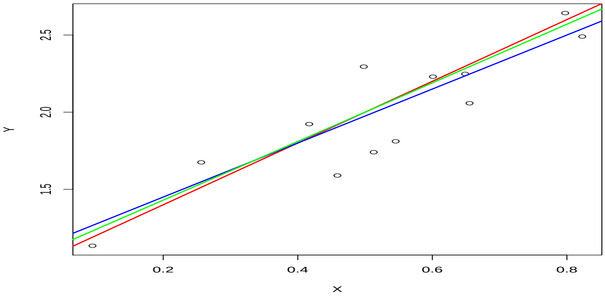


UNIVERSITÉ RENNES 2

Ajustement linéaire d'un nuage de points

Notations

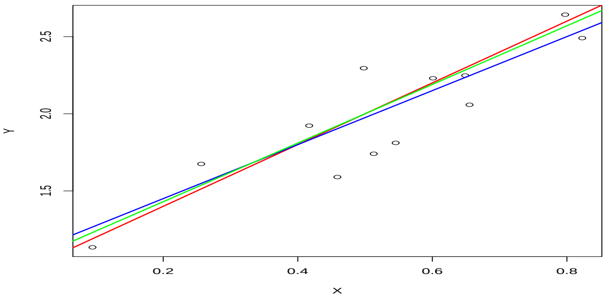
- n observations $y_1, \dots, y_n$ de la **variable à expliquer** (maxO3).
- n observations $x_1, \dots, x_n$ de la **variable explicative** (T12).



Ajustement linéaire d'un nuage de points

Notations

- n observations $y_1, \dots, y_n$ de la **variable à expliquer** (maxO3).
- n observations $x_1, \dots, x_n$ de la **variable explicative** (T12).



Problème

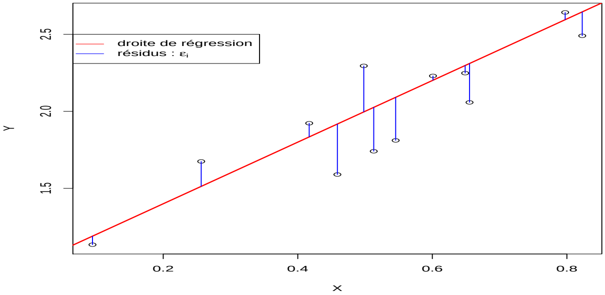
Trouver la droite qui ajuste "au mieux" le nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$.

- On cherche $y = \beta_0 + \beta_1 x$ qui ajuste au mieux le nuage des points.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent pas sur une droite :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

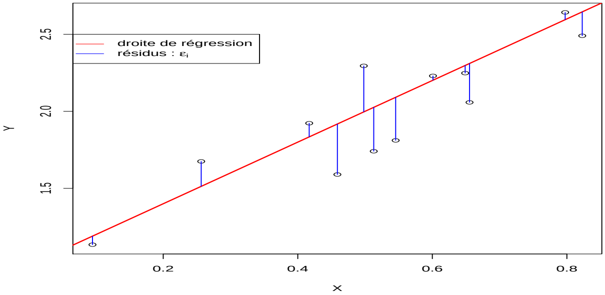
- On cherche $y = \beta_0 + \beta_1 x$ qui ajuste au mieux le nuage des points.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent pas sur une droite :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$



- On cherche $y = \beta_0 + \beta_1 x$ qui ajuste au mieux le nuage des points.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent pas sur une droite :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$



Idée

Chercher à minimiser les **erreurs** ou les **bruits** ε_i.

Le critère des moindres carrés

Critère des MC

On cherche (β_0, β_1) qui minimisent

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Solution

La solution est donnée par :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

à condition que tous les x_i ne soient pas égaux.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le critère des moindres carrés

Critère des MC

On cherche (β_0, β_1) qui minimisent

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Solution

La solution est donnée par :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

à condition que tous les x_i ne soient pas égaux.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Début de modélisation statistique

- L'idée sous-jacente est que la variable Y est liée à X par une relation linéaire ou quasi-linéaire.
- Sur les observations, la linéarité n'est généralement pas "parfaite".
- **Hypothèse :** cet "écart" à la linéarité est la conséquence de phénomène que l'on ne peut contrôler de manière déterministe (**phénomènes aléatoires**).

Les erreurs $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ sont des variables aléatoires.

Début de modélisation statistique

- L'idée sous-jacente est que la variable Y est liée à X par une relation linéaire ou quasi-linéaire.
- Sur les observations, la linéarité n'est généralement pas "parfaite".
- **Hypothèse :** cet "écart" à la linéarité est la conséquence de phénomène que l'on ne peut contrôler de manière déterministe (**phénomènes aléatoires**).

Les erreurs $\varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$ sont des variables aléatoires.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Début de modélisation statistique

- L'idée sous-jacente est que la variable Y est liée à X par une relation linéaire ou quasi-linéaire.
- Sur les observations, la linéarité n'est généralement pas "parfaite".
- **Hypothèse :** cet "écart" à la linéarité est la conséquence de phénomène que l'on ne peut contrôler de manière déterministe (**phénomènes aléatoires**).

Les erreurs $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$ sont des variables aléatoires.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le modèle de régression linéaire (V1)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec

- $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ n variables aléatoires indépendantes.

Conséquence

- $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables aléatoires indépendantes.
- Qu'en est-il pour les x_i ?
  - quantités déterministes ?
  - quantités aléatoires ?
- L'étude des proriétés statistiques du modèle linéaire est quasiment identique selon la nature des x_i, nous les supposerons déterministes dans la suite.

Le modèle de régression linéaire (V1)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec

- $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ n variables aléatoires indépendantes.

Conséquence

- $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables aléatoires indépendantes.
- Qu'en est-il pour les x_i ?
  - quantités déterministes ?
  - quantités aléatoires ?
- L'étude des proriétés statistiques du modèle linéaire est quasiment identique selon la nature des x_i, nous les supposerons déterministes dans la suite.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le modèle de régression linéaire (V1)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec

- $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ n variables aléatoires indépendantes.

Conséquence

- $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables aléatoires indépendantes.
- Qu'en est-il pour les x_i ?
  - quantités déterministes ?
  - quantités aléatoires ?
- L'étude des proriétés statistiques du modèle linéaire est quasiment identique selon la nature des x_i, nous les supposerons déterministes dans la suite.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le modèle de régression linéaire (V1)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

avec

- $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ n variables aléatoires indépendantes.

Conséquence

- $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables aléatoires indépendantes.
- Qu'en est-il pour les x_i ?
  - quantités déterministes ?
  - quantités aléatoires ?
- L'étude des proriétés statistiques du modèle linéaire est quasiment identique selon la nature des x_i, nous les supposerons déterministes dans la suite.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Premières propriétés

Rappels

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Propriétés

Sous les hypothèses :

1. $\mathcal{H}_1$: $\mathbf{E}(\varepsilon_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
2. $\mathcal{H}_2$: $\mathbf{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ pour $i = 1, \dots, n$.

on a

1. $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont des estimateurs sans biais.
2. Les variances sont données par

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Premières propriétés

Rappels

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Propriétés

Sous les hypothèses :

1. $\mathcal{H}_1$: $\mathbf{E}(\varepsilon_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
2. $\mathcal{H}_2$: $\mathbf{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ pour $i = 1, \dots, n$.

on a

1. $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont des estimateurs sans biais.
2. Les variances sont données par

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Premières propriétés

Rappels

$$\hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar x \quad \text{et} \quad \hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar Y)(x_i - \bar x)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)^2}$$

Propriétés

Sous les hypothèses :

1. $\mathcal{H}_1$: $\mathbf{E}(\varepsilon_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
2. $\mathcal{H}_2$: $\mathbf{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ pour $i = 1, \dots, n$.

on a

1. $\hat\beta_0$ et $\hat\beta_1$ sont des estimateurs sans biais.
2. Les variances sont données par

$$\mathbf{V}(\hat\beta_0) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat\beta_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)^2}.$$

Résidus

Vocabulaire

- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$: valeur ajustée de Y_i par le modèle.
- $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ résidu.
- Etant donné x_{n+1} une nouvelle valeur de la variable X, cherche à estimer $y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 x_{n+1}$.
- Un estimateur naturel est la prévision associée à cette nouvelle observation $\hat{Y}_{n+1}$:

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Résidus

Vocabulaire

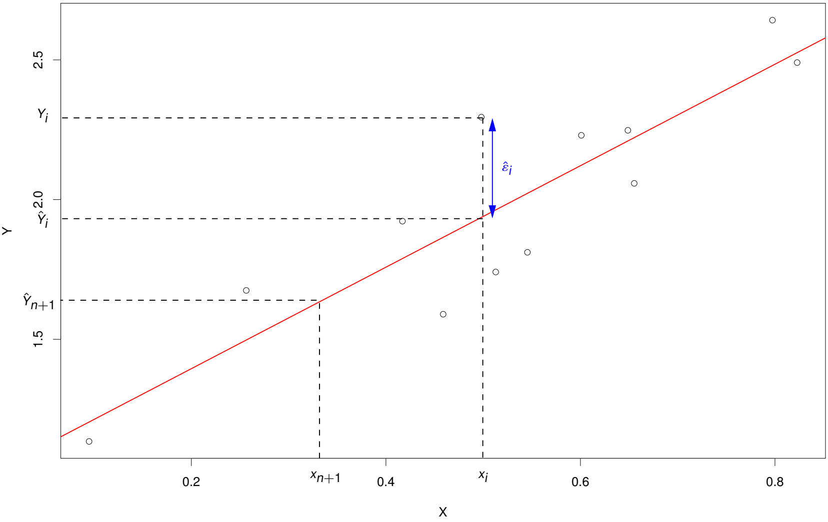
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$: valeur ajustée de Y_i par le modèle.
- $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ résidu.
- Etant donné x_{n+1} une nouvelle valeur de la variable X, cherche à estimer $y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 x_{n+1}$.
- Un estimateur naturel est la prévision associée à cette nouvelle observation $\hat{Y}_{n+1}$:
$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1}.$$

Résidus

Vocabulaire

- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$: valeur ajustée de Y_i par le modèle.
- $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ résidu.
- Etant donné x_{n+1} une nouvelle valeur de la variable X, cherche à estimer $y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 x_{n+1}$.
- Un estimateur naturel est la prévision associée à cette nouvelle observation $\hat{Y}_{n+1}$:
$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+1}.$$

UNIVERSITÉ RENNES 2



2.5
Y_i
2.0
$\hat{Y}_i$
Y
$\hat{Y}_{n+1}$
1.5
$\hat{\varepsilon}_i$
0.2
x_{n+1}
0.4
x_i
0.6
0.8
X

Propriété

On a

$$\mathbf{V}(\hat{Y}_{n+1}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

La variance de la prévision est d'autant plus faible que :

- σ^2 est petit (on pouvait s'y attendre...).
- x_{n+1} est proche du centre de gravité des x_i (plus difficile de bien prédire vers les extrêmes).

Questions

1. Comment mesurer la qualité du modèle ?
2. Comment tester la valeur des coefficients du modèle ?
3. Peut-on obtenir des intervalles de confiance pour les paramètres β_j ou pour la prévision $\hat{Y}_{n+1}$?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Propriété

On a

$$\mathbf{V}(\hat{Y}_{n+1}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

La variance de la prévision est d'autant plus faible que :

- σ^2 est petit (on pouvait s'y attendre...).
- x_{n+1} est proche du centre de gravité des x_i (plus difficile de bien prédire vers les extrêmes).

Questions

1. Comment mesurer la qualité du modèle ?
2. Comment tester la valeur des coefficients du modèle ?
3. Peut-on obtenir des intervalles de confiance pour les paramètres β_j ou pour la prévision $\hat{Y}_{n+1}$?

Propriété

On a

$$\mathbf{V}(\hat{Y}_{n+1}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

La variance de la prévision est d'autant plus faible que :

- σ^2 est petit (on pouvait s'y attendre...).
- x_{n+1} est proche du centre de gravité des x_i (plus difficile de bien prédire vers les extrêmes).

Questions

1. Comment mesurer la qualité du modèle ?
2. Comment tester la valeur des coefficients du modèle ?
3. Peut-on obtenir des intervalles de confiance pour les paramètres β_j ou pour la prévision $\hat{Y}_{n+1}$?

UNIVERSITÉ RENNES 2

La loi normale

Définition

- Une v.a.r X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Propriétés

- $\mathbf{E}[X] = \mu$ et $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors
$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

La loi normale

Définition

- Une v.a.r X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

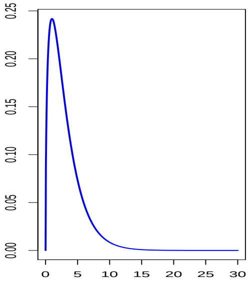
Propriétés

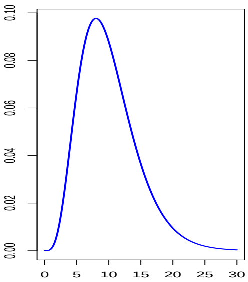
- $\mathbf{E}[X] = \mu$ et $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors
$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Définition

- Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La variable $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi du Chi-Deux à n degrés de liberté. Elle est notée $\chi^2(n)$.
- $\mathbf{E}[Y] = n$ et $\mathbf{V}[Y] = 2n$.



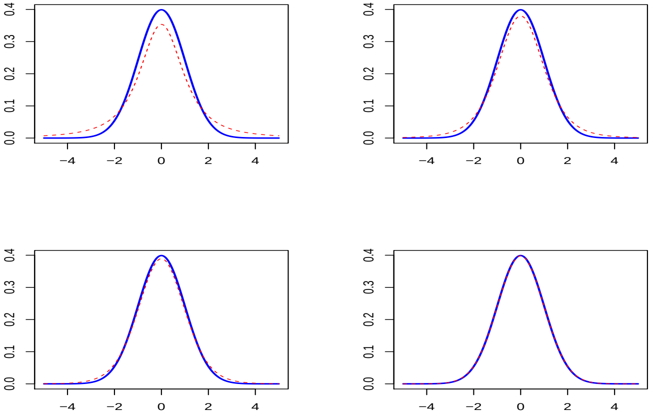


Loi de Student

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.
$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$
suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(x)$.
- $\mathbf{E}[T] = 0$ et $\mathbf{V}[T] = n/(n-2)$.
- Lorsque n est grand la loi de student à n degrés de liberté peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2



Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (rouge).

Loi de Fisher

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r indépendantes de lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r
$$F = \frac{X/m}{Y/m}$$
suit une loi de Ficher à m et n degrés de liberté. On note $\mathcal{F}(m, n)$.
- Si $F \sim \mathcal{F}(m, n)$ alors $1/F \sim \mathcal{F}(n, m)$.

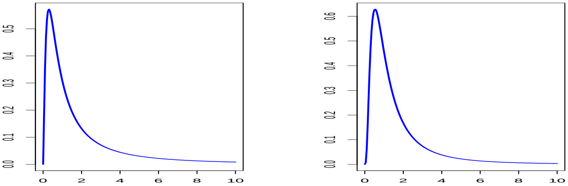


FIGURE – Densités $\mathcal{F}(5, 2)$ et $\mathcal{F}(10, 4)$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Hypothèse de normalité

- Pour pouvoir faire de l'inférence, il nous faut mettre une loi sur la variable à expliquer.

$\mathcal{H}_2$: les variables aléatoires ε_i suivent une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Remarque

Cette hypothèse revient à supposer que $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$. Elle nous amène donc à considérer le modèle paramétrique $(\mathbb{R}, \{\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2), (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2\})$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Hypothèse de normalité

- Pour pouvoir faire de l'inférence, il nous faut mettre une loi sur la variable à expliquer.

$\mathcal{H}_2$: les variables aléatoires ε_i suivent une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Remarque

Cette hypothèse revient à supposer que $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$. Elle nous amène donc à considérer le modèle paramétrique $(\mathbb{R}, \{\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2), (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2\})$.

Hypothèse de normalité

- Pour pouvoir faire de l'inférence, il nous faut mettre une loi sur la variable à expliquer.

$\mathcal{H}_2$: les variables aléatoires ε_i suivent une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Remarque

Cette hypothèse revient à supposer que $Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$. Elle nous amène donc à considérer le modèle paramètrique $(\mathbb{R}, \{\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2), (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2\})$.

Lois des estimateurs

σ^2 connu

1. $\hat\beta_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2_{\hat\beta_0})$ et $\hat\beta_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2_{\hat\beta_1})$

σ^2 inconnu

On pose $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat\varepsilon_i^2 = \frac{\|\hat\varepsilon\|^2}{n-2}$. On a

1. $(n-2)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$.
2. $(\hat\beta_0, \hat\beta_1)$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. $\frac{\hat\beta_0 - \beta_0}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_0}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.
4. $\frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_1}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.

Il est alors "facile" de construire des intervalles de confiance sur les paramètres ainsi que des tests d'hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Lois des estimateurs

σ^2 connu

1. $\hat\beta_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2_{\hat\beta_0})$ et $\hat\beta_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2_{\hat\beta_1})$

σ^2 inconnu

On pose $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat\varepsilon_i^2 = \frac{\|\hat\varepsilon\|^2}{n-2}$. On a

1. $(n-2)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$.
2. $(\hat\beta_0, \hat\beta_1)$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. $\frac{\hat\beta_0 - \beta_0}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_0}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.
4. $\frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_1}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.

Il est alors "facile" de construire des intervalles de confiance sur les paramètres ainsi que des tests d'hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Lois des estimateurs

σ^2 connu

1. $\hat\beta_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2_{\hat\beta_0})$ et $\hat\beta_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2_{\hat\beta_1})$

σ^2 inconnu

On pose $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat\varepsilon_i^2 = \frac{\|\hat\varepsilon\|^2}{n-2}$. On a

1. $(n-2)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$.
2. $(\hat\beta_0, \hat\beta_1)$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. $\frac{\hat\beta_0 - \beta_0}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_0}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.
4. $\frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_1}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.

Il est alors "facile" de construire des intervalles de confiance sur les paramètres ainsi que des tests d'hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Lois des estimateurs

σ^2 connu

1. $\hat\beta_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2_{\hat\beta_0})$ et $\hat\beta_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2_{\hat\beta_1})$

σ^2 inconnu

On pose $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat\varepsilon_i^2 = \frac{\|\hat\varepsilon\|^2}{n-2}$. On a

1. $(n-2)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$.
2. $(\hat\beta_0, \hat\beta_1)$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. $\frac{\hat\beta_0 - \beta_0}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_0}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.
4. $\frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_1}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.

Il est alors "facile" de construire des intervalles de confiance sur les paramètres ainsi que des tests d'hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Lois des estimateurs

σ^2 connu

1. $\hat\beta_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2_{\hat\beta_0})$ et $\hat\beta_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1, \sigma^2_{\hat\beta_1})$

σ^2 inconnu

On pose $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat\varepsilon_i^2 = \frac{\|\hat\varepsilon\|^2}{n-2}$. On a

1. $(n-2)\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$.
2. $(\hat\beta_0, \hat\beta_1)$ et $\widehat{\sigma}^2$ sont indépendants.
3. $\frac{\hat\beta_0 - \beta_0}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_0}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.
4. $\frac{\hat\beta_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\hat\beta_1}} \sim \mathcal{T}_{n-2}$.

Il est alors "facile" de construire des intervalles de confiance sur les paramètres ainsi que des tests d'hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Exemple de l'ozone

```
> reg.simple <- lm(maxO3~T12,data=donnees)
> summary(reg.simple)

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12, data = donnees)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-38.0789 -12.7352   0.2567  11.0029  44.6714

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -27.4196     9.0335  -3.035    0.003 **
T12           5.4687     0.4125  13.258   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 17.57 on 110 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6151,Adjusted R-squared: 0.6116
F-statistic: 175.8 on 1 and 110 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Intervalle de confiance de prévision

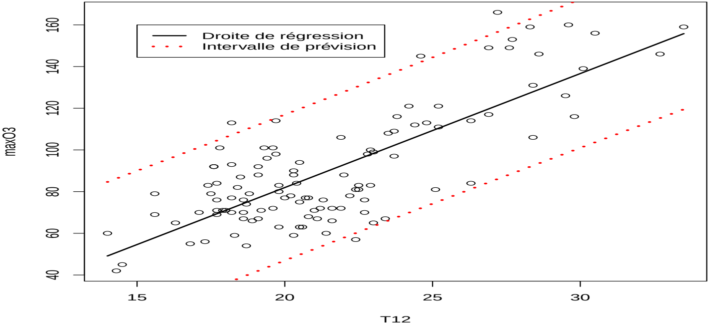
IC pour Y_{n+1}

$$\left[\hat{Y}_{n+1} \mp t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right].$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

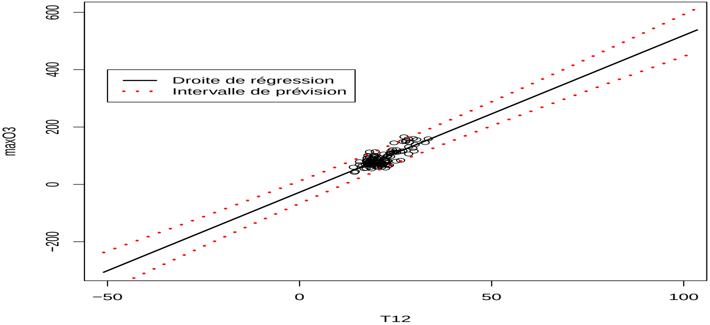
IC pour Y_{n+1}

$$\left[\hat{Y}_{n+1} \mp t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right].$$



IC pour Y_{n+1}

$$\left[\hat{Y}_{n+1} \pm t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right].$$



- La température à 12h n'est pas la seule variable permettant d'**expliquer** ou de **prédire** la concentration en ozone.
- D'autres variables doivent être prise en compte (nébulosité, force et direction du vent...).
- Nécessité d'étendre le modèle linéaire à plus d'une variable explicative.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Notations

- Y : variable (aléatoire) à expliquer à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $X_1, \dots, X_p$: p variables explicatives à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ avec $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$.

Le modèle de régression linaire multiple

Le modèle s'écrit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

où les erreurs aléatoires ε_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Notations

- Y : variable (aléatoire) à expliquer à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $X_1, \dots, X_p$: p variables explicatives à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ avec $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$.

Le modèle de régression linaire multiple

Le modèle s'écrit :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

où les erreurs aléatoires ε_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- On note

$$\mathbb{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix},\quad \mathbb{X}=\begin{pmatrix}1 & x_{11} & \dots & x_{1p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_p\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle

Le modèle se réécrit

$$\mathbb{Y}=\mathbb{X}\beta+\varepsilon$$

où $\varepsilon\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\mathbf{I_n})$.

- On note

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle

Le modèle se réécrit

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I_n})$.

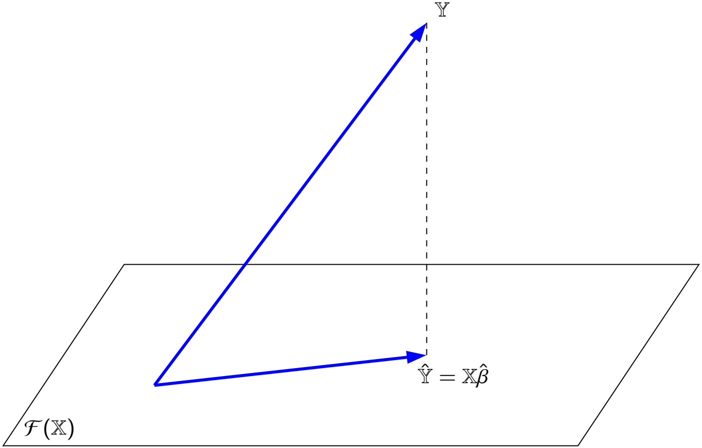
Définition

On appelle **estimateur des moindres carrés** $\hat{\beta}$ de β la statistique suivante :

$$\hat{\beta} = \operatorname*{argmin}_{\beta_0,\dots,\beta_p} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots \beta_p x_{ip})^2 = \operatorname*{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \|\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta\|^2.$$

- On note $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ le s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p+1$ engendré par les $p+1$ colonnes de $\mathbb{X}$.
- Chercher l'estimateur des moindres carrés revient à minimiser la distance entre $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Représentation géométrique



- On déduit que $\mathbb{X}\hat{\beta}$ est le projeté orthogonal de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{X})$:

$$\mathbb{X}\hat{\beta} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Théorème

Si la matrice $\mathbb{X}$ est de plein rang, l'estimateur des MC est donné par :

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Expression de l'estimateur des moindres carrés

- On déduit que $\mathbb{X}\hat{\beta}$ est le projeté orthogonal de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{X})$:

$$\mathbb{X}\hat{\beta} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Théorème

Si la matrice $\mathbb{X}$ est de plein rang, l'estimateur des MC est donné par :

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Expression de l'estimateur des moindres carrés

- On déduit que $\mathbb{X}\hat{\beta}$ est le projeté orthogonal de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{X})$:

$$\mathbb{X}\hat{\beta} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Théorème

Si la matrice $\mathbb{X}$ est de plein rang, l'estimateur des MC est donné par :

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{Y}.$$

Propriété

1. $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β.
2. La matrice de variance-covariance de $\hat{\beta}$ est donnée par

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}.$$

3. $\hat{\beta}$ est VUMSB.

Remarque

La log-vraisemblance du modèle $(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}(x_i'\beta, \sigma^2)^{\otimes n}, \beta \in \mathbb{R}^{p+1}\})$ est donnée par

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_n; \beta) = \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta\|^2.$$

Conclusion : l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}_{MV}$ coïncide avec l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$.

Propriété

1. $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β.
2. La matrice de variance-covariance de $\hat{\beta}$ est donnée par

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}.$$

3. $\hat{\beta}$ est VUMSB.

Remarque

La log-vraisemblance du modèle $(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}(x_i'\beta, \sigma^2)^{\otimes n}, \beta \in \mathbb{R}^{p+1}\})$ est donnée par

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_n; \beta) = \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta\|^2.$$

Conclusion : l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}_{MV}$ coïncide avec l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$.

Propriété

1. $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β.
2. La matrice de variance-covariance de $\hat{\beta}$ est donnée par

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}.$$

3. $\hat{\beta}$ est VUMSB.

Remarque

La log-vraisemblance du modèle $(\mathbb{R}^n, \{\mathcal{N}(x_i'\beta, \sigma^2)^{\otimes n}, \beta \in \mathbb{R}^{p+1}\})$ est donnée par

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_n; \beta) = \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbb{Y} - \mathbb{X}\beta\|^2.$$

Conclusion : l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}_{MV}$ coïncide avec l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$.

Loi des estimateurs

- Soit $\hat{\varepsilon} = \mathbb{Y} - \hat{\mathbb{Y}}$ le vecteur des résidus et $\widehat{\sigma^2}$ l'estimateur de σ^2 défini par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{n - (p+1)}.$$

Proposition

1. $\hat{\beta}$ est un vecteur gaussien d'espérance β et de matrice de variance-covariance $\sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$.
2. $(n-(p+1))\frac{\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-(p+1)}$.
3. $\hat{\beta}$ et $\widehat{\sigma^2}$ sont indépendantes.

UNIVERSITÉ RENNES 2

- Soit $\hat{\varepsilon} = \mathbb{Y} - \hat{\mathbb{Y}}$ le vecteur des résidus et $\widehat{\sigma^2}$ l'estimateur de σ^2 défini par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{n-(p+1)}.$$

Proposition

1. $\hat{\beta}$ est un vecteur gaussien d'espérance β et de matrice de variance-covariance $\sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$.
2. $(n-(p+1))\frac{\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-(p+1)}$.
3. $\hat{\beta}$ et $\widehat{\sigma^2}$ sont indépendantes.

Loi des estimateurs

- Soit $\hat{\varepsilon} = \mathbb{Y} - \hat{\mathbb{Y}}$ le vecteur des résidus et $\widehat{\sigma^2}$ l'estimateur de σ^2 défini par
$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{n-(p+1)}.$$

Proposition

1. $\hat{\beta}$ est un vecteur gaussien d'espérance β et de matrice de variance-covariance $\sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$.
2. $(n-(p+1))\frac{\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-(p+1)}$.
3. $\hat{\beta}$ et $\widehat{\sigma^2}$ sont indépendantes.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Corollaire

On note $\widehat{\sigma_j^2} = \widehat{\sigma^2}[\mathbb{X}'\mathbb{X}]_{jj}^{-1}$ pour $j = 0, \ldots, p$. On a

$$\forall j = 0, \ldots, p, \quad \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\widehat{\sigma_j}} \sim \mathcal{T}(n - (p+1)).$$

On déduit de ce corollaire :

- des intervalles de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour β_j.
- des procédures de test pour des hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Corollaire

On note $\widehat{\sigma_j^2} = \widehat{\sigma^2}[\mathbb{X}'\mathbb{X}]^{-1}_{jj}$ pour $j = 0, \dots, p$. On a

$$\forall j = 0, \dots, p, \quad \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\widehat{\sigma_j}} \sim \mathcal{T}(n - (p+1)).$$

On déduit de ce corollaire :

- des intervalles de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour β_j.
- des procédures de test pour des hypothèses du genre $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

Prévision

- On dispose d'une nouvelle observation $x_{n+1} = (x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,p})$ et on souhaite prédire la valeur $y_{n+1} = x'_{n+1}\beta$ associée à cette nouvelle observation.

- Un estimateur (naturel) de y_{n+1} est $\hat{y}_{n+1} = x'_{n+1}\hat{\beta}$.
- Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour y_{n+1} est donné par

$$\left[\hat{y}_{n+1} \mp t_{n-(p+1)}(\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{x'_{n+1}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}x_{n+1} + 1}\right].$$

UNIVERSITÉ RENNES 2

Prévision

- On dispose d'une nouvelle observation $x_{n+1} = (x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,p})$ et on souhaite prédire la valeur $y_{n+1} = x'_{n+1}\beta$ associée à cette nouvelle observation.

- Un estimateur (naturel) de y_{n+1} est $\hat{y}_{n+1} = x'_{n+1}\hat{\beta}$.
- Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour y_{n+1} est donné par

$$\left[\hat{y}_{n+1} \pm t_{n-(p+1)}(\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{x'_{n+1}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}x_{n+1} + 1}\right].$$

Prévision

- On dispose d'une nouvelle observation $x_{n+1} = (x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,p})$ et on souhaite prédire la valeur $y_{n+1} = x'_{n+1}\beta$ associée à cette nouvelle observation.

- Un estimateur (naturel) de y_{n+1} est $\hat{y}_{n+1} = x'_{n+1}\hat{\beta}$.
- Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour y_{n+1} est donné par

$$\left[\hat{y}_{n+1} \pm t_{n-(p+1)}(\alpha/2)\hat{\sigma}\sqrt{x'_{n+1}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}x_{n+1} + 1}\right].$$

- On considère le modèle de régression multiple :

$$MaxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 T_{15} + \beta_3 N_{12} + \beta_4 V_{12} + \beta_5 MaxO3v + \varepsilon.$$

```
> reg.multi <- lm(maxO3~T12+T15+Ne12+Vx12+maxO3v,data=donnees)
> summary(reg.multi)

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12 + T15 + Ne12 + Vx12 + maxO3v, data = donnees)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-54.216  -9.446  -0.896   8.007  41.186

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.04498   13.01591   0.234   0.8155
T12          2.47747    1.09257   2.268   0.0254 *
T15          0.63177    0.96382   0.655   0.5136
Ne12        -1.83560    0.89439  -2.052   0.0426 *
Vx12         1.33295    0.58168   2.292   0.0239 *
maxO3v       0.34215    0.05989   5.713 1.03e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 14.58 on 106 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7444,Adjusted R-squared: 0.7324
F-statistic: 61.75 on 5 and 106 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

UNIVERSITÉ RENNES 2

Questions

- Le modèle linéaire repose sur certaines hypothèses (normalité des erreurs par exemple), comment les vérifier ?
- A partir de p variables explicatives, il est possible de construire (au moins) 2^p modèles linéaires, comment choisir le "meilleur" sous-ensemble de variables à inclure dans le modèle ?

Questions

- Le modèle linéaire repose sur certaines hypothèses (normalité des erreurs par exemple), comment les vérifier ?

- A partir de p variables explicatives, il est possible de construire (au moins) 2^p modèles linéaires, comment choisir le "meilleur" sous-ensemble de variables à inclure dans le modèle ?

Analyse des résidus

- Le modèle linéaire

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

- Les erreurs ε sont inconnues. On les estime par $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Propriété

$$\mathbf{E}(\hat{\varepsilon}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2 (I - \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}).$$

Conséquence

Un moyen de vérifier l'hypothèse de normalité des erreurs est de comparer la distribution des **résidus studentisés**

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

à la distribution gaussienne centrée réduite.

Analyse des résidus

- Le modèle linéaire

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

- Les erreurs ε sont inconnues. On les estime par $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Propriété

$$\mathbf{E}(\hat{\varepsilon}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2 (I - \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}).$$

Conséquence

Un moyen de vérifier l'hypothèse de normalité des erreurs est de comparer la distribution des **résidus studentisés**

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

à la distribution gaussienne centrée réduite.

Analyse des résidus

- Le modèle linéaire

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

- Les erreurs ε sont inconnues. On les estime par $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

Propriété

$$\mathbf{E}(\hat{\varepsilon}_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2(I - \mathbf{P}_{\mathcal{F}(\mathbb{X})}).$$

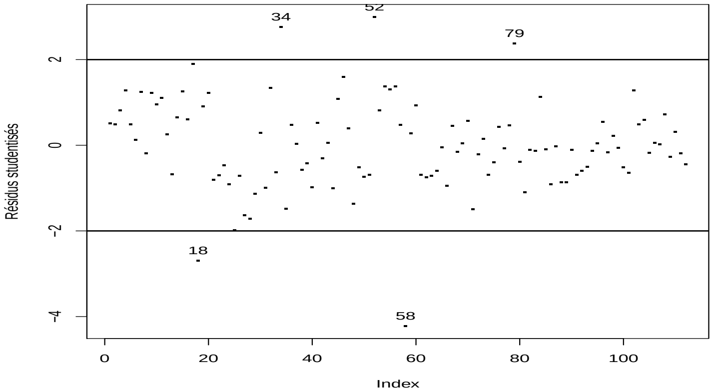
Conséquence

Un moyen de vérifier l'hypothèse de normalité des erreurs est de comparer la distribution des **résidus studentisés**

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}}$$

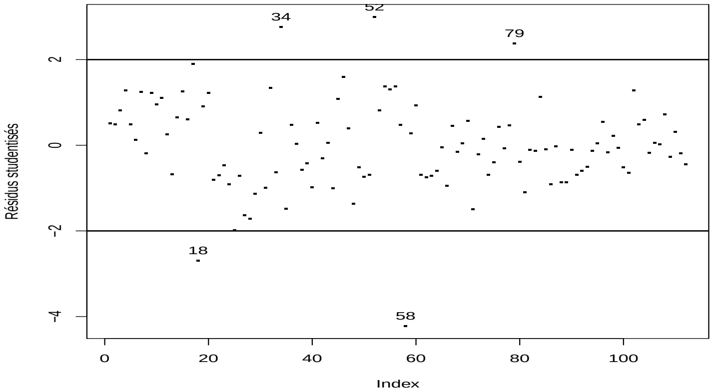
à la distribution gaussienne centrée réduite.

Tracé d'un index plot



L'analyse de ce type de graphique est généralement accomgné d'un test d'adéquation des résidus à la loi normale (test de Shapiro-Wilks par exemple).

Tracé d'un index plot



L'analyse de ce type de graphique est généralement accomgné d'un test d'adéquation des résidus à la loi normale (test de Shapiro-Wilks par exemple).

Le coefficient de détermination R^2

Equation d'analyse de la variance

On a d'après Pythagore :

$$\begin{aligned} \|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 &= \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 \\ SCT &= SCE + SCR \end{aligned}$$

Coefficient de détermination R^2

$$R^2 = \frac{\text{V. expliquée par le modèle}}{\text{V. totale}} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2} = \frac{SCE}{SCT}.$$

- $0 \leq R^2 \leq 1$.
- Si $R^2 = 1$, la variabilité est entièrement expliquée par le modèle.
- Si $R^2 = 0$, la variabilité se trouve dans la résiduelle (ce qui n'est pas très bon...).

Le coefficient de détermination R^2

Equation d'analyse de la variance

On a d'après Pythagore :

$$\begin{aligned}\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 &= \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 \\ SCT &= SCE + SCR\end{aligned}$$

Coefficient de détermination R^2

$$R^2 = \frac{\text{V. expliquée par le modèle}}{\text{V. totale}} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2} = \frac{SCE}{SCT}.$$

- $0 \leq R^2 \leq 1$.
- Si $R^2 = 1$, la variabilité est entièrement expliquée par le modèle.
- Si $R^2 = 0$, la variabilité se trouve dans la résiduelle (ce qui n'est pas très bon...).

Le coefficient de détermination R^2

Equation d'analyse de la variance

On a d'après Pythagore :

$$\begin{aligned} \|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 &= \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 + \|\hat{\varepsilon}\|^2 \\ SCT &= SCE + SCR \end{aligned}$$

Coefficient de détermination R^2

$$R^2 = \frac{\text{V. expliquée par le modèle}}{\text{V. totale}} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbf{1}\|^2}{\|Y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2} = \frac{SCE}{SCT}.$$

- $0 \leq R^2 \leq 1$.
- Si $R^2 = 1$, la variabilité est entièrement expliquée par le modèle.
- Si $R^2 = 0$, la variabilité se trouve dans la résiduelle (ce qui n'est pas très bon...).

Le test de Fisher global

- Modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Hypothèses

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, p\} \beta_j \neq 0.$$

- Sous H_0,

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - (p+1)}{p} \sim \mathcal{F}_{p,n-(p+1)}.$$

- On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{p,n-(p+1)}(1 - \alpha)$.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le test de Fisher global

- Modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Hypothèses

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, p\} \beta_j \neq 0.$$

- Sous H_0,

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - (p+1)}{p} \sim \mathcal{F}_{p,n-(p+1)}.$$

- On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{p,n-(p+1)}(1-\alpha)$.

Le test de Fisher global

- Modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Hypothèses

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, p\} \beta_j \neq 0.$$

- Sous H_0,

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - (p+1)}{p} \sim \mathcal{F}_{p,n-(p+1)}.$$

- On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{p,n-(p+1)}(1 - \alpha)$.

Généralisation

- On souhaite tester le modèle $\mathcal{M}_1$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

contre le modèle $\mathcal{M}_0$

$$Y_i = \beta_q x_{iq} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Cela revient à tester si les q premiers coefficients de $\mathcal{M}_1$ sont nuls

$$H_0 : \beta_0 = \ldots = \beta_{q-1} = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{0, \ldots, q-1\} \beta_j \neq 0.$$

On parle de test entre modèles emboités car $\mathcal{M}_0$ est un cas particulier de $\mathcal{M}_1$.

Généralisation

- On souhaite tester le modèle $\mathcal{M}_1$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

contre le modèle $\mathcal{M}_0$

$$Y_i = \beta_q x_{iq} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Cela revient à tester si les q premiers coefficients de $\mathcal{M}_1$ sont nuls

$$H_0 : \beta_0 = \ldots = \beta_{q-1} = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{0, \ldots, q-1\} \beta_j \neq 0.$$

On parle de test entre modèles emboités car $\mathcal{M}_0$ est un cas particulier de $\mathcal{M}_1$.

RENNES 2

Généralisation

- On souhaite tester le modèle $\mathcal{M}_1$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

contre le modèle $\mathcal{M}_0$

$$Y_i = \beta_q x_{iq} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Cela revient à tester si les q premiers coefficients de $\mathcal{M}_1$ sont nuls

$$H_0 : \beta_0 = \ldots = \beta_{q-1} = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{0, \ldots, q-1\} \beta_j \neq 0.$$

On parle de test entre modèles emboités car $\mathcal{M}_0$ est un cas particulier de $\mathcal{M}_1$.

Idée

On note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p+1$ engendré par les colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p-q+1$ engendré par les $p-q+1$ colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}_0$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}_0$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$, l'idée consiste à regarder si $\hat{\mathbb{Y}}_0$ est "proche" de $\hat{\mathbb{Y}}$:
  - si $\hat{\mathbb{Y}}_0 \approx \hat{\mathbb{Y}}$, on choisira le modèle $\mathcal{M}_0$ (on acceptera H_0).
  - Sinon, on choisira le modèle $\mathcal{M}_1$ (on rejettera H_0).

Statistique de test

Idée

On note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p+1$ engendré par les colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p-q+1$ engendré par les $p-q+1$ colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}_0$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}_0$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$, l'idée consiste à regarder si $\hat{\mathbb{Y}}_0$ est "proche" de $\hat{\mathbb{Y}}$:
  - si $\hat{\mathbb{Y}}_0 \approx \hat{\mathbb{Y}}$, on choisira le modèle $\mathcal{M}_0$ (on acceptera H_0).
  - Sinon, on choisira le modèle $\mathcal{M}_1$ (on rejettera H_0).

Statistique de test

Idée

On note :

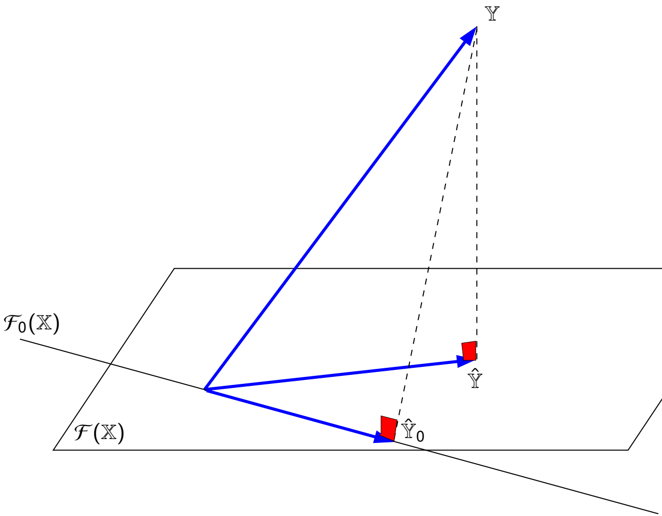
- $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p+1$ engendré par les colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p-q+1$ engendré par les $p-q+1$ colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}_0$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}_0$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$, l'idée consiste à regarder si $\hat{\mathbb{Y}}_0$ est "proche" de $\hat{\mathbb{Y}}$:
  - si $\hat{\mathbb{Y}}_0 \approx \hat{\mathbb{Y}}$, on choisira le modèle $\mathcal{M}_0$ (on acceptera H_0).
  - Sinon, on choisira le modèle $\mathcal{M}_1$ (on rejettera H_0).

Statistique de test

Idée

On note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p+1$ engendré par les colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X})$ le s.e.v de dimension $p-q+1$ engendré par les $p-q+1$ colonnes de $\mathbb{X}$ et $\hat{\mathbb{Y}}_0$ la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathcal{F}_0$.
- $\mathcal{F}_0(\mathbb{X}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{X})$, l'idée consiste à regarder si $\hat{\mathbb{Y}}_0$ est "proche" de $\hat{\mathbb{Y}}$:
  - si $\hat{\mathbb{Y}}_0 \approx \hat{\mathbb{Y}}$, on choisira le modèle $\mathcal{M}_0$ (on acceptera H_0).
  - Sinon, on choisira le modèle $\mathcal{M}_1$ (on rejettera H_0).


$\mathbb{Y}$
$\mathcal{F}_0(\mathbb{X})$
$\hat{\mathbb{Y}}$
$\mathcal{F}(\mathbb{X})$
$\hat{\mathbb{Y}}_0$

Le test

Cochran...

Sous H_0,

$$F = \frac{\|\hat{\mathbb{Y}}_0 - \hat{\mathbb{Y}}\|^2/q}{\|\mathbb{Y} - \hat{\mathbb{Y}}\|^2/(n-(p+1))} \sim \mathcal{F}_{q,n-(p+1)}.$$

- On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{q,n-(p+1)}(1-\alpha)$.

Cochran...

Sous H_0,

$$F = \frac{\|\hat{\mathbb{Y}}_0 - \hat{\mathbb{Y}}\|^2/q}{\|\mathbb{Y} - \hat{\mathbb{Y}}\|^2/(n-(p+1))} \sim \mathcal{F}_{q,n-(p+1)}.$$

- On rejette H_0 si $F_{obs} > F_{q,n-(p+1)}(1-\alpha)$.

Exemple

- On considère le modèle

$$MaxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 T_{15} + \beta_3 N_{12} + \beta_4 V_{12} + \beta_5 MaxO3v + \varepsilon$$

et on teste $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{2,3,4\} : \beta_j \neq 0$.

```
> reg0 <- lm(max03~T12+max03v,data=donnees)
> reg1 <- lm(max03~T12+T15+Ne12+Vx12+max03v,data=donnees)
> anova(reg0,reg1)
Analysis of Variance Table

Model 1: max03 ~ T12 + max03v
Model 2: max03 ~ T12 + T15 + Ne12 + Vx12 + max03v
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F   Pr(>F)
1    109 26348
2    106 22540  3    3808.4 5.97 0.000844 ***
```

$pc = 0.000844 > 0.05$, on rejette H_0 et on conserve le modèle à 5 variables par rapport au modèle à 2 variables.

Exemple

- On considère le modèle

$$MaxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 T_{15} + \beta_3 N_{12} + \beta_4 V_{12} + \beta_5 MaxO3v + \varepsilon$$

et on teste $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{2,3,4\} : \beta_j \neq 0$.

```
> reg0 <- lm(maxO3~T12+maxO3v,data=donnees)
> reg1 <- lm(maxO3~T12+T15+Ne12+Vx12+maxO3v,data=donnees)
> anova(reg0,reg1)
Analysis of Variance Table

Model 1: maxO3 ~ T12 + maxO3v
Model 2: maxO3 ~ T12 + T15 + Ne12 + Vx12 + maxO3v
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F   Pr(>F)
1    109 26348
2    106 22540  3    3808.4 5.97 0.000844 ***
```

$pc = 0.000844 > 0.05$, on rejette H_0 et on conserve le modèle à 5 variables par rapport au modèle à 2 variables.

Exemple

- On considère le modèle

$$MaxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 T_{15} + \beta_3 N_{12} + \beta_4 V_{12} + \beta_5 MaxO3v + \varepsilon$$

et on teste $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{2,3,4\} : \beta_j \neq 0$.

```
> reg0 <- lm(maxO3~T12+maxO3v,data=donnees)
> reg1 <- lm(maxO3~T12+T15+Ne12+Vx12+maxO3v,data=donnees)
> anova(reg0,reg1)
Analysis of Variance Table

Model 1: maxO3 ~ T12 + maxO3v
Model 2: maxO3 ~ T12 + T15 + Ne12 + Vx12 + maxO3v
  Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F   Pr(>F)
1    109 26348
2    106 22540  3    3808.4 5.97 0.000844 ***
```

$pc = 0.000844 > 0.05$, on rejette H_0 et on conserve le modèle à 5 variables par rapport au modèle à 2 variables.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Motivations

- Jusqu'à présent, les variables explicatives étaient quantitatives.
- Comment généraliser le modèle linéaire à des variables explicatives qualitatives.

Exemple

Comment expliquer la variable `max03` par la variable `vent` (ou pluie) ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Motivations

- Jusqu'à présent, les variables explicatives étaient quantitatives.
- Comment généraliser le modèle linéaire à des variables explicatives qualitatives.

Exemple

Comment expliquer la variable `maxO3` par la variable `vent` (ou pluie) ?

UNIVERSITÉ RENNES 2

Le modèle

- Y variable à expliquer (quantitative) et X variable explicative (qualitative) à J modalités, niveaux ou facteurs.
- On dispose de n observations. Soit n_j le nombre d'individus pour lesquels on a observé la $j^{\text{ème}}$ modalité de X.
- On ordonne les individus selon les modalités de X :

Y	Y_{11}	$\dots$	Y_{1n_1}	Y_{21}	$\dots$	$\dots$	Y_{J,n_J}
X	M_1	$\dots$	M_1	M_2	$\dots$	$\dots$	M_J

Ecriture 1

Le modèle d'ANOVA à un facteur s'écrit

$$Y_{ij} = \alpha_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots J,$$

avec ε_{ij} i.i.d. et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Le modèle

- Y variable à expliquer (quantitative) et X variable explicative (qualitative) à J modalités, niveaux ou facteurs.
- On dispose de n observations. Soit n_j le nombre d'individus pour lesquels on a observé la $j^{\text{ème}}$ modalité de X.
- On ordonne les individus selon les modalités de X :

Y	Y_{11}	$\dots$	Y_{1n_1}	Y_{21}	$\dots$	$\dots$	Y_{J,n_J}
X	M_1	$\dots$	M_1	M_2	$\dots$	$\dots$	M_J

Ecriture 1

Le modèle d'ANOVA à un facteur s'écrit

$$Y_{ij} = \alpha_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots J,$$

avec ε_{ij} i.i.d. et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Ecriture matricielle

- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ et on écrit le modèle

$$Y_i = \beta_1 \mathbf{1}_{x_i = M_1} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i = M_2} + \dots + \beta_J \mathbf{1}_{x_i = M_J} + \varepsilon_i$$

  où ε_i i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- Si on note

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x_1 = M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_1 = M_J} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{x_n = M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_n = M_J} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

  On a alors l'écriture matricielle

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon.$$

- Il s'agit d'un modèle de régression multiple pour une matrice $\mathbb{X}$ particulière.
- Tout ce qui a été vu dans les sections précédentes (estimation, tests, résidus...) peut s'appliquer à ce nouveau modèle.

Ecriture matricielle

- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ et on écrit le modèle

$$Y_i = \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=M_1} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=M_2} + \dots + \beta_J \mathbf{1}_{x_i=M_J} + \varepsilon_i$$

où ε_i i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- Si on note

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x_1=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_1=M_J} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{x_n=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_n=M_J} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

On a alors l'écriture matricielle

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon.$$

- Il s'agit d'un modèle de régression multiple pour une matrice $\mathbb{X}$ particulière.
- Tout ce qui a été vu dans les sections précédentes (estimation, tests, résidus...) peut s'appliquer à ce nouveau modèle.

Ecriture matricielle

- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ et on écrit le modèle
$$Y_i = \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=M_1} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=M_2} + \ldots + \beta_J \mathbf{1}_{x_i=M_J} + \varepsilon_i$$
où ε_i i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Si on note
$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x_1=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_1=M_J} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{x_n=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_n=M_J} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$
On a alors l'écriture matricielle
$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon.$$

- Il s'agit d'un modèle de régression multiple pour une matrice $\mathbb{X}$ particulière.
- Tout ce qui a été vu dans les sections précédentes (estimation, tests, résidus...) peut s'appliquer à ce nouveau modèle.

Ecriture matricielle

- n observations $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ et on écrit le modèle

$$Y_i = \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=M_1} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=M_2} + \dots + \beta_J \mathbf{1}_{x_i=M_J} + \varepsilon_i$$

  où ε_i i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Si on note

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x_1=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_1=M_J} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{1}_{x_n=M_1} & \dots & \mathbf{1}_{x_n=M_J} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_J \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

  On a alors l'écriture matricielle

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon.$$

- Il s'agit d'un modèle de régression multiple pour une matrice $\mathbb{X}$ particulière.
- Tout ce qui a été vu dans les sections précédentes (estimation, tests, résidus...) peut s'appliquer à ce nouveau modèle.

Un exemple

```
> reg <- lm(maxO3~vent,data=donnees)
> reg
Call:
lm(formula = maxO3 ~ vent, data = donnees)
Coefficients:
(Intercept)     ventNord    ventOuest      ventSud
    105.600      -19.471      -20.900       -3.076
```

Remarque importante

- La fonction renvoie une estimation pour une constante et pas d'estimation pour la modalité `Est`.
- Le modèle ajusté est le suivant :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i$$

  muni de la contrainte $\beta_1 = 0$.
- Une telle écriture est moins intuitive mais donne lieu à d'importantes généralisations.

Un exemple

```
> reg <- lm(max03~vent,data=donnees)
> reg
Call:
lm(formula = max03 ~ vent, data = donnees)
Coefficients:
(Intercept)     ventNord    ventOuest      ventSud
    105.600      -19.471      -20.900       -3.076
```

Remarque importante

- La fonction renvoie une estimation pour une constante et pas d'estimation pour la modalité `Est`.
- Le modèle ajusté est le suivant :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i$$

  muni de la contrainte $\beta_1 = 0$.
- Une telle écriture est moins intuitive mais donne lieu à d'importantes généralisations.

Un exemple

```
> reg <- lm(max03~vent,data=donnees)
> reg
Call:
lm(formula = max03 ~ vent, data = donnees)
Coefficients:
(Intercept)     ventNord    ventOuest      ventSud
    105.600      -19.471      -20.900       -3.076
```

Remarque importante

- La fonction renvoie une estimation pour une constante et pas d'estimation pour la modalité `Est`.
- Le modèle ajusté est le suivant :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i$$

  muni de la contrainte $\beta_1 = 0$.
- Une telle écriture est moins intuitive mais donne lieu à d'importantes généralisations.

Un exemple

```
> reg <- lm(max03~vent,data=donnees)
> reg
Call:
lm(formula = max03 ~ vent, data = donnees)
Coefficients:
(Intercept)     ventNord     ventOuest       ventSud
    105.600      -19.471       -20.900        -3.076
```

Remarque importante

- La fonction renvoie une estimation pour une constante et pas d'estimation pour la modalité `Est`.
- Le modèle ajusté est le suivant :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i$$

  muni de la contrainte $\beta_1 = 0$.
- Une telle écriture est moins intuitive mais donne lieu à d'importantes généralisations.

Test de "significativité" du facteur

- On souhaite savoir si la variable X à une influence sur Y : la direction du vent a-t-elle un influence sur la concentration en ozone ?
- On teste donc $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0$ pour le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i.$$

- Il suffit de reprendre le test de Fisher vu dans la partie précédente.

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
vent        3   7586 2528.69  3.3881 0.02074 *
Residuals 108  80606  746.35
```

$pc = 0.02074 < 0.05$, on rejette H_0. On peut conclure au risque $\alpha = 5\%$ que la direction du vent à une influcence sur la concentration en ozone.

Test de "significativité" du facteur

- On souhaite savoir si la variable X à une influence sur Y : la direction du vent a-t-elle un influence sur la concentration en ozone ?
- On teste donc $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0$ pour le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i.$$

- Il suffit de reprendre le test de Fisher vu dans la partie précédente.

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
vent        3   7586 2528.69  3.3881 0.02074 *
Residuals 108  80606  746.35
```

$pc = 0.02074 < 0.05$, on rejette H_0. On peut conclure au risque $\alpha = 5\%$ que la direction du vent à une influcence sur la concentration en ozone.

Test de "significativité" du facteur

- On souhaite savoir si la variable X à une influence sur Y : la direction du vent a-t-elle un influence sur la concentration en ozone ?
- On teste donc $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0$ pour le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i=Sud} + \varepsilon_i.$$

- Il suffit de reprendre le test de Fisher vu dans la partie précédente.

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
vent        3   7586 2528.69  3.3881 0.02074 *
Residuals 108  80606  746.35
```

$pc = 0.02074 < 0.05$, on rejette H_0. On peut conclure au risque $\alpha = 5\%$ que la direction du vent à une influcence sur la concentration en ozone.

Test de "significativité" du facteur

- On souhaite savoir si la variable X à une influence sur Y : la direction du vent a-t-elle un influence sur la concentration en ozone ?
- On teste donc $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0$ pour le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i = Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i = Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i = Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i = Sud} + \varepsilon_i.$$

- Il suffit de reprendre le test de Fisher vu dans la partie précédente.

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
vent        3   7586 2528.69  3.3881 0.02074 *
Residuals 108  80606  746.35
```

$pc = 0.02074 < 0.05$, on rejette H_0. On peut conclure au risque $\alpha = 5\%$ que la direction du vent à une influcence sur la concentration en ozone.

Test de "significativité" du facteur

- On souhaite savoir si la variable X à une influence sur Y : la direction du vent a-t-elle un influence sur la concentration en ozone ?
- On teste donc $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0$ contre $H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0$ pour le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_i = Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_i = Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_i = Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_i = Sud} + \varepsilon_i.$$

- Il suffit de reprendre le test de Fisher vu dans la partie précédente.

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
vent        3   7586 2528.69  3.3881 0.02074 *
Residuals 108  80606  746.35
```

$pc = 0.02074 < 0.05$, on rejette H_0. On peut conclure au risque $\alpha = 5\%$ que la direction du vent à une influcence sur la concentration en ozone.

UNIVERSITÉ RENNES 2

Un exemple

- On souhaite expliquer `max03` par la direction du vent et la pluie.
- On dipose de n observations (x_i, Y_i) et on écrit le modèle

$$\begin{aligned} Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_{i1}=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_{i1}=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_{i1}=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_{i1}=Sud} \\ + \beta_5 \mathbf{1}_{x_{i2}=pluie} + \beta_6 \mathbf{1}_{x_{i2}=Sec} + \varepsilon \end{aligned}$$

muni des contraintes $\beta_1 = 0$ et $\beta_5 = 0$.

```
> reg <- lm(max03~vent+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = max03 ~ vent + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)     ventNord    ventOuest      ventSud    pluieSec
     85.123      -16.333      -12.709       -2.101      25.597
```

- On souhaite expliquer `max03` par la direction du vent et la pluie.
- On dipose de n observations (x_i, Y_i) et on écrit le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}_{x_{i1}=Est} + \beta_2 \mathbf{1}_{x_{i1}=Nord} + \beta_3 \mathbf{1}_{x_{i1}=Ouest} + \beta_4 \mathbf{1}_{x_{i1}=Sud} + \beta_5 \mathbf{1}_{x_{i2}=pluie} + \beta_6 \mathbf{1}_{x_{i2}=Sec} + \varepsilon$$

muni des contraintes $\beta_1 = 0$ et $\beta_5 = 0$.

```
> reg <- lm(max03~vent+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = max03 ~ vent + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)     ventNord    ventOuest      ventSud     pluieSec
     85.123      -16.333      -12.709       -2.101       25.597
```

Test de signicativité des facteurs

- Une fois de plus, c'est le test de Fisher qui nous permet de tester la significativité des variables explicatives dans le modèle.
- On réalise les deux tests de Fisher pour les hypothèses :

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0.$$

$$H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{5, 6\} : \beta_j \neq 0.$$

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: max03
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
vent        3   7586  2528.7  4.1984  0.007514 **
pluie       1  16159 16159.4 26.8295 1.052e-06 ***
Residuals 107  64446   602.3
```

Test de signicativité des facteurs

- Une fois de plus, c'est le test de Fisher qui nous permet de tester la significativité des variables explicatives dans le modèle.
- On réalise les deux tests de Fisher pour les hypothèses :

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0.$$

$$H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{5, 6\} : \beta_j \neq 0.$$

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: max03
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
vent        3   7586  2528.7  4.1984  0.007514 **
pluie       1  16159 16159.4 26.8295 1.052e-06 ***
Residuals 107  64446   602.3
```

Test de signicativité des facteurs

- Une fois de plus, c'est le test de Fisher qui nous permet de tester la significativité des variables explicatives dans le modèle.
- On réalise les deux tests de Fisher pour les hypothèses :

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_4 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \ldots, 4\} : \beta_j \neq 0.$$

$$H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{5, 6\} : \beta_j \neq 0.$$

```
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: max03
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
vent        3   7586  2528.7  4.1984  0.007514 **
pluie       1  16159 16159.4 26.8295 1.052e-06 ***
Residuals 107  64446   602.3
```

- Les variables explicatives quantitatives et qualitatives ont été traitées séparément dans ce chapitre.
- Bien évidemment, en pratique il convient de les traiter ensemble (il suffit d'écrire correctement la partie quantitative et la partie qualitative du modèle).

Exemple

$$maxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 Ne_{15} + \beta_3 \mathbf{1}_{pluie} + \beta_4 \mathbf{1}_{sec} + \varepsilon$$

muni de la contrainte $\beta_3 = 0$.

```
> reg <- lm(maxO3~T12+Ne15+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12 + Ne15 + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)          T12         Ne15    pluieSec
     -5.978        4.594       -1.613       8.413
```

Conclusion

- Les variables explicatives quantitatives et qualitatives ont été traitées séparément dans ce chapitre.
- Bien évidemment, en pratique il convient de les traiter ensemble (il suffit d'écrire correctement la partie quantitative et la partie qualitative du modèle).

Exemple

$$maxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 Ne_{15} + \beta_3 \mathbf{1}_{pluie} + \beta_4 \mathbf{1}_{sec} + \varepsilon$$

muni de la contrainte $\beta_3 = 0$.

```
> reg <- lm(maxO3~T12+Ne15+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12 + Ne15 + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)          T12         Ne15    pluieSec
     -5.978        4.594       -1.613       8.413
```

Conclusion

- Les variables explicatives quantitatives et qualitatives ont été traitées séparément dans ce chapitre.
- Bien évidemment, en pratique il convient de les traiter ensemble (il suffit d'écrire correctement la partie quantitative et la partie qualitative du modèle).

Exemple

$$maxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 Ne_{15} + \beta_3 \mathbf{1}_{pluie} + \beta_4 \mathbf{1}_{sec} + \varepsilon$$

muni de la contrainte $\beta_3 = 0$.

```
> reg <- lm(maxO3~T12+Ne15+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12 + Ne15 + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)          T12         Ne15     pluieSec
     -5.978        4.594       -1.613        8.413
```

UNIVERSITÉ RENNES 2

Conclusion

- Les variables explicatives quantitatives et qualitatives ont été traitées séparément dans ce chapitre.
- Bien évidemment, en pratique il convient de les traiter ensemble (il suffit d'écrire correctement la partie quantitative et la partie qualitative du modèle).

Exemple

$$maxO3 = \beta_0 + \beta_1 T_{12} + \beta_2 Ne_{15} + \beta_3 \mathbf{1}_{pluie} + \beta_4 \mathbf{1}_{sec} + \varepsilon$$

muni de la contrainte $\beta_3 = 0$.

```
> reg <- lm(maxO3~T12+Ne15+pluie,data=donnees)
> reg

Call:
lm(formula = maxO3 ~ T12 + Ne15 + pluie, data = donnees)

Coefficients:
(Intercept)          T12         Ne15     pluieSec
     -5.978        4.594       -1.613        8.413
```

UNIVERSITÉ RENNES 2

Un exemple de sélection de variables

```
> reg <- lm(maxO3~.,data=donnees)
> anova(reg)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
          Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
T9         1  43138   43138 205.0160 < 2.2e-16 ***
T12        1  11125   11125  52.8706 9.165e-11 ***
T15        1    876     876   4.1619 0.0440614 *
Ne9        1   3244    3244  15.4170 0.0001613 ***
Ne12       1    232     232   1.1035 0.2961089
Ne15       1      5       5   0.0248 0.8752847
Vx9        1   2217    2217  10.5355 0.0016079 **
Vx12       1      1       1   0.0049 0.9443039
Vx15       1     67      67   0.3186 0.5737491
maxO3v     1   6460    6460  30.6993 2.584e-07 ***
vent       3    234      78   0.3709 0.7741473
pluie      1    183     183   0.8694 0.3534399
Residuals 97  20410     210
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Méthode pas à pas

```
> reg1 <- step(reg,direction="backward")
> anova(reg1)
Analysis of Variance Table

Response: maxO3
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
T12         1  54244   54244 276.777 < 2.2e-16 ***
Ne9         1   3579    3579  18.260 4.193e-05 ***
Vx9         1   2035    2035  10.385  0.001684 **
maxO3v      1   7364    7364  37.572 1.499e-08 ***
Residuals 107  20970     196
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Références I