UFR Sciences Sociales - Département MASS

Licence M A S S - Deuxième année

Algèbre Linéaire

Laurent Rouvière

Université Rennes 2
Place du Recteur H. le Moal
CS 24307 - 35043 Rennes
Tel : 02 99 14 18 21
Mel : laurent.rouviere@univ-rennes2.fr

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels et bases

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1 *Etant donné un corps K (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un K espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$ formé :*
- *d'un ensemble E dont tous les éléments sont appelés vecteurs ;*
- *d'une loi d'addition qui est une application*

$$\begin{array}{rll} + : & E \times E & \to E \\ & (u, v) & \mapsto (u + v) \end{array}$$

- *d'une loi de multiplication par un scalaire*

$$\begin{array}{rll} . : & K \times E & \to E \\ & (\lambda, u) & \mapsto \lambda u \end{array}$$

tel que
1. *$(E, +)$ est un groupe abélien (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre et d'un opposé) ;*
2. *$\forall (\lambda, \mu) \in K^2$ et $\forall (u, v) \in E^2$ on a :*

$$\begin{cases} (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \\ (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \\ \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \\ 1u = u \end{cases}$$

Exemple 1.1
- *L'espace $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 0$;*
- *L'espace des suites de nombres réels ;*
- *L'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels ;*
- *L'espace $Fonct(I, \mathbb{R})$ des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Pour vérifier que ces exemples conviennent, il faut vérifier les 8 axiomes, ce qui n'est pas forcément difficile mais un peu long. Pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel, on préfère souvent montrer que c'est un sous-espace vectoriel.

Définition 1.2 *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Un espace vectoriel $(F, +', .')$ est appelé sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si :*

1. *$F \subset E$;*
2. *la loi d'addition*

$$\begin{aligned} +' : \quad F \times F &\to F \\ (u, v) &\mapsto (u + v) \end{aligned}$$

   est la restriction de la loi $+$.

3. *la loi de multiplication par un scalaire :*

$$\begin{aligned} .' : \quad K \times F &\to F \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

   est la restriction de la loi ..

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble F de E définit un sous-espace vectoriel de E s'il est non-vide et s'il est stable par les restrictions à F de l'addition et de la multiplication par un scalaire de E, autrement dit si :*

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda u + \mu v \in F.$$

Pour simplifier, à partir de maintenant E désignera un espace vectoriel.

Définition 1.3 — *Etant donné des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ de E, on appelle* **combinaison linéaire** *à coefficients réels de $u_1, \ldots, u_p$ tout vecteur de la forme*

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

- *L'espace des combinaisons linéaires à coefficients réels de $u_1, \ldots, u_p$ sera noté $\mathsf{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et appelé* **espace engendré** *par $u_1, \ldots, u_p$.*
- *Plus généralement, si A est une partie non vide, finie ou infinie de E, $\mathsf{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A et est appelé* **espace engendré** *par A.*

Remarque 1.1 1. *L'espace engendré par un vecteur u est appelé droite vectorielle engendré par u et $\mathsf{Vect}(u) = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

2. *$\mathsf{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.*

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors F contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, donc contient $\mathsf{Vect}(A)$. $\mathsf{Vect}(A)$ est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

■

1.2 Bases et dimension

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de cette base. Cette propriété a un double avantage : d'une part, on peut exprimer n'importe quel vecteur en fonction de ces n vecteurs particuliers. D'autre part, on peut comparer du premier coup d'oeil deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$: comme chacun d'eux s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la base canonique : $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, on a

$$u = v \Longleftrightarrow u_i = v_i \forall i.$$

C'est pour permettre de calculer dans les espaces vectoriels que nous allons définir en toute généralité la notion de base.

Définition 1.4 *1. Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E telle que $\mathsf{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = E$ est appelée famille génératrice de E. Dit autrement, $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur v de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille ($\forall v \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.)*

2. On dit que E est un espace de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie d'éléments de E.

On peut alors vérifier que si E est de dimension finie et non réduit à $\{0\}$ alors il existe $u_1, \ldots, u_p$ dans E tels que $\mathsf{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = E$.

Définition 1.5 *On dit qu'une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E est une famille* **libre** *de E si tout vecteur de $\mathsf{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ s'exprime de manière unique comme combinaison linaire de $u_1, \ldots, u_p$. On dit que la famille est liée dans le cas contraire.*

Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, on dit aussi que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants. Si elle est liée, on dit que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Proposition 1.2 *1. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre si et seulement si*

$$(\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

2. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée si et seulement si

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0) : \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0.$$

3. Si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée, alors au moins l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres ($\Longleftrightarrow det(u_1, \ldots, u_p) = 0$).

Nous sommes maintenant en mesure de définir la notion de base dans un espace vectoriel.

Définition 1.6 *On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base d'un espace vectoriel E si c'est une famille libre et génératrice de E. C'est-à-dire, si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, i.e.,*

$$\forall v \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in K^p \ tq \ v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

Théorème 1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre $C = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E peut être complétée en une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n)$ de E.*

Théorème 1.2 (et définition) *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé* **dimension** *de l'espace vectoriel E et est noté $dim(E)$.*

Corollaire 1.1 *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

1. *Toute famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base.*
2. *Toute famille génératrice $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base.*

Corollaire 1.2 (Cas de $\mathbb{R}^n$) *Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $det(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.*

Proposition 1.3 (Dimension d'un sous-espace)

1. *Un sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie.*
2. *On a alors $dim(F) \leq dim(E)$.*
3. *Si $dim(F) = dim(E)$, on a $F = E$.*

On peut construire une infinité de bases d'un même espace vectoriel E. Suivant le problème auquel nous sommes confrontés, certaines bases se prêteront mieux à sa résolution. Il est donc non seulement important de savoir gérer les changements de bases mais aussi de trouver des bases "pertinentes" suivant le problème considéré.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle application linéaire de E dans F la donnée d'une application $f : E \to F$ telle que :*

$$\forall (u, v) \in E^2 : f(u + v) = f(u) + f(v),$$

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Remarque 2.1
1. *$f(0) = 0$: $f(u) = f(u + 0) = f(u) + f(0)$.*
2. *$f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_p f(u_p)$.*

Proposition 2.1 *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Preuve. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires, u et v deux vecteurs de E et λ un réel.

$$(g \circ f)(u + v) = g(f(u + v)) = g(f(u) + f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).$$

$$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)) = \lambda (g \circ f)(u).$$

■

Définition 2.2 *Soit $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications linéaires. On définit la somme $f + g : E \to F$ en posant :*

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u).$$

On définit aussi le produit λf d'une application linéaire par un scalaire en posant :

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u).$$

Proposition 2.2
1. *La somme de deux applications linéaires est linéaire.*
2. *Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire.*

Preuve.

$$(f + g)(u + v) = f(u + v) + g(u + v) = f(u) + f(v) + g(u) + g(v) = (f + g)(u) + (f + g)(v).$$

$$(f + g)(\lambda u) = f(\lambda u) + g(\lambda u) = \lambda f(u) + \lambda g(u) = \lambda (f + g)(u).$$

■

Corollaire 2.1 (et définition) *Soient E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $L(E,F)$ des applications linéaires de E dans F a une structure d'espace vectoriel pour les opérations de somme et produit par un scalaire définies ci-dessus.*

Exemple 2.1

1. *Pour tout vecteur t, on définit la translation f_t de vecteur t par*

$$\begin{aligned} f_t : &E \to E \\ &u \mapsto u+t \end{aligned}$$

La translation n'est pas une application linéaire :

$$f_t(u+v) = u+v+t \neq (u+t)+(v+t) = f_t(u)+f_t(v).$$

2. *Pour tout réel a, on définit l'homothétie de rapport a par*

$$\begin{aligned} h_a : &E \to E \\ &u \mapsto au \end{aligned}$$

L'homothétie est une application linéaire.

3. *La projection $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ parallèlement à une droite vectorielle F sur une droite vectorielle G est une application linéaire.*
4. *La symétrie s dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à une droite vectorielle G parallèlement à une droite vectorielle F est une application linéaire.*
5. **Espaces de fonctions :** *Considérons l'espace $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:*
   — *L'application $D : E \to E$ définie par $D(f) = f'$ qui dérive les fonctions est linéaire.*
   — *Soit a et b deux réels. L'application*

$$\begin{aligned} \phi : &E \to \mathbb{R} \\ &f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

est linéaire.

Définition 2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle* **noyau** *de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F, autrement dit :*

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\}.$$

Proposition 2.3 *Le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. Soit u et v dans $\ker(f)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = 0 + 0 = 0.$$

■

On rappelle qu'une application f est injective si

$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

Dans les démonstrations, il est souvent plus simple de montrer la contraposée :

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

Grâce au noyau, on dispose maintenant d'un critère beaucoup plus simple pour montrer qu'une application est injective.

Proposition 2.4 (Critère d'injectivité) *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a :*

$$f \text{ injective } \Longleftrightarrow \ker(f) = \{0\}.$$

Preuve. Supposons f injective. On sait que $f(0) = 0$ (car f est une application linéaire) donc $0 \in \ker(f)$. Soit $u \neq 0$, f étant injective $f(u) \neq f(0) = 0$, aucun autre élément de E ne peut avoir pour image 0, donc $\ker(f) = \{0\}$.

Réciproquement, soit u et v deux vecteurs de E ayant la même image ($f(u) = f(v)$), on a alors :

$$f(u - v) = 0 \Longleftrightarrow (u - v) \in \ker(f) \Longleftrightarrow u = v.$$

■

Définition 2.4 *Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire. On appelle* **image** *de f et on note $\mathsf{Im}(f)$ l'ensemble des vecteurs de F image d'au moins un vecteur de E, autrement dit :*

$$\mathsf{Im}(f) = \{v \in F : \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = v\}.$$

On définit alors le **rang** *de l'application linéaire f comme étant égal à la dimension de $\mathsf{Im}(f)$.*

Théorème 2.1 (Théorème du rang) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\ker(f)$ et $\mathsf{Im}(f)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie et :*

$$dim(\mathsf{Im}(f)) + dim(\ker(f)) = dim(E).$$

Nous avons introduit les bases afin de pouvoir faire des calculs dans les espaces vectoriels de dimension finie. Maintenant que nous avons défini les applications linéaires et présenté quelques-unes de leurs propriétés, nous allons introduire les matrices pour pouvoir faire des calculs sur les applications linéaires.

2.2 Matrices et applications linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$, F un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f : E \to F$ une application linéaire. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p) \\ \mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \end{cases}$$

Question : Que nous faut-il connaître pour déterminer f de manière "parfaite" ?

Connaître f revient à connaître l'image de tout vecteur w de E par f. Soit w quelconque fixé dans E, w s'écrit $w = a_1 e_1 + \ldots + a_p e_p$ dans $\mathcal{B}_E$. $f(w)$ est un vecteur de F, cherchons ses coordonnées dans $\mathcal{B}_F$. Comme f est une application linéaire, on a

$$f(w) = a_1 f(e_1) + \ldots + a_p f(e_p).$$

$f(e_1) \in F$, $f(e_1)$ peut donc se décomposer dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\begin{aligned} f(e_1) = &\quad b_{11}\varepsilon_1 + \ldots + b_{n1}\varepsilon_n \\ \vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\ f(e_p) = &\quad b_{1p}\varepsilon_1 + \ldots + b_{np}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} f(w) =& a_1 f(e_1) + \ldots + a_p f(e_p) \\ =& (a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \ldots + a_p b_{1p})\varepsilon_1 + \ldots + (a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \ldots + a_p b_{np})\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Les coordonnées de $f(w)$ dans $\mathcal{B}_F$ peuvent se réécrire comme un produit matriciel

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

Pour identifier une application linéaire f en connaissant la base de départ et la base d'arrivée, il suffit de connaître

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} f(e_1) & \quad & \quad & f(e_p) \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \ldots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}$$

Cette matrice est appelée **matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**.

Conclusion

- Pour connaître une application linéaire $f : E \to F$, il faut se donner une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'espace de départ, une base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de l'espace d'arrivé, f est alors entièrement déterminée par la matrice $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.
- Réciproquement, toute matrice de dimension $\mathsf{dim}(F) \times \mathsf{dim}(E)$ définit une application linéaire de E dans F.
- Suivant les bases que l'on considère, une application linéaire peut avoir plusieurs représentations matricielles. C'est pourquoi il faut toujours préciser les bases dans lesquelles les calculs sont menés.

Exemple 2.2 *Si $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$.*

1. *La matrice de l'application $\mathsf{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport à la base canonique est :*

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *L'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(e_1) = 3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2, \quad f(e_2) = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2, \quad f(e_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

a pour matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si maintenant $\mathcal{B}_E = (e_2, e_1, e_3)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_2, \varepsilon_1)$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Matrice de la somme

Proposition 2.5 (Somme de matrices) *Soit E et F deux espaces vectoriels. On considère $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ deux bases de E et F. Soit f_1 et f_2 deux applications linéaires de E dans F. Alors*

1. *La matrice de $f_1 + f_2$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f_1 + f_2) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f_2).$$

2. *La matrice de λf par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

2.2.2 Matrice de la composée

Exemple 2.3 *Soit (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère deux applications linéaires f et g dont les matrices par rapport aux bases canoniques sont*

$$M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Donner les espaces de départ et d'arrivée de f et g.*
2. *Soit h l'application composée $h = g \circ f$. Quels sont les espaces de départ et d'arrivée de h ?*
3. *Montrer que la représentation matricielle de h dans la base canonique est $M_g M_f$.*

1. *$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.*
2. *$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.*

3. Il suffit de calculer $h(e_i), i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} h(e_1) =& g(f(e_1)) = g(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) = g(\varepsilon_1) + 4g(\varepsilon_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 + 4(e_1 + 4e_2 + 3e_3) \\ =& 6e_1 + 19e_2 + 13e_3 \end{aligned}$$

$$h(e_2) = 7e_1 + 18e_2 + 11e_3, \quad h(e_3) = 11e_1 + 19e_2 + 8e_3.$$

On en déduit

$$M_h = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 11 \\ 19 & 18 & 19 \\ 13 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de vérifier que $M_h = M_g M_f$.

Cas général On considère trois espaces vectoriels de dimensions finies :

— E de dimension m avec une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_m)$,

— F de dimension n avec une base $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$,

— G de dimension p avec une base $\mathcal{B}_G = (\eta_1, \dots, \eta_p)$

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

Proposition 2.6 (Matrice de la composée) *La matrice de l'application linéaire $h = g \circ f$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est donnée par :*

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(h) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{f, M_f}"] \arrow[dr, "{h = g \circ f}" description, "{M_h = M_g M_f}"'] & F \arrow[d, "{g, M_g}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Corollaire 2.2 *Soit f une application linéaire inversible de E dans E. On note f^{-1} son application inverse, i.e., $f^{-1} : E \to E$ et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_E$, alors*

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M^{-1}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f).$$

2.3 Exemples dans $\mathbb{R}^2$

2.3.1 Matrice d'une projection

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur une droite vectorielle G parallèlement à une droite vectorielle F (voir Figure **??**). On note :

— $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 \in G$ et $v_2 \in F$;
— u un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$;
— $q(u)$ l'image de u par la projection sur F parallèlement à G.

On a alors :

1. $p(u) \in G$ et $u - p(u) = q(u)$ est dans F.
2. $p + q = \mathsf{id}$
3. La matrice de p par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

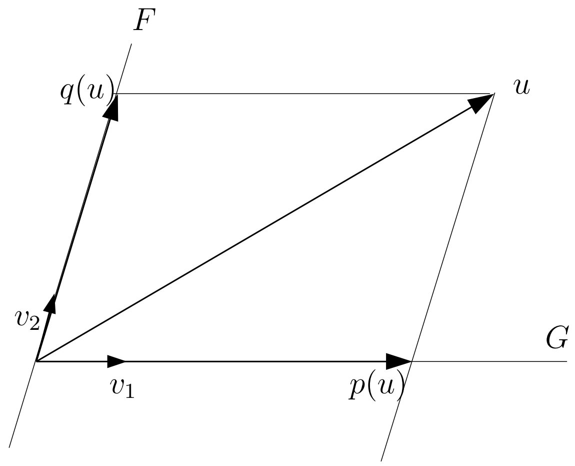

FIGURE 2.1 – Projection sur G parallèlement à F.

On remarque que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p)M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p)$.

Définition 2.5 *Soit E un espace vectoriel. On appelle* ***projecteur*** *de E toute application linéaire $p : E \to E$ telle que $p = p \circ p$. On dit que p est la projection sur $\mathsf{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.*

2.3.2 Matrice d'une symétrie

On peut définir la symétrie s dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à une droite vectorielle G parallèlement à une droite vectorielle F par (voir Figure **??**) :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto p(u) - q(u) \end{aligned}$$

où

— $p(u)$ est la projection sur G parallèlement à F ;
— $q(u)$ est la projection sur F parallèlement à G.

Proposition 2.7 *Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 \in G$ et $v_2 \in F$. La symétrie par rapport à G et parallèlement par à F est :*

$$\begin{aligned} s : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) &\to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \\ (x, y) &\mapsto (x, -y). \end{aligned}$$

On a de plus

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

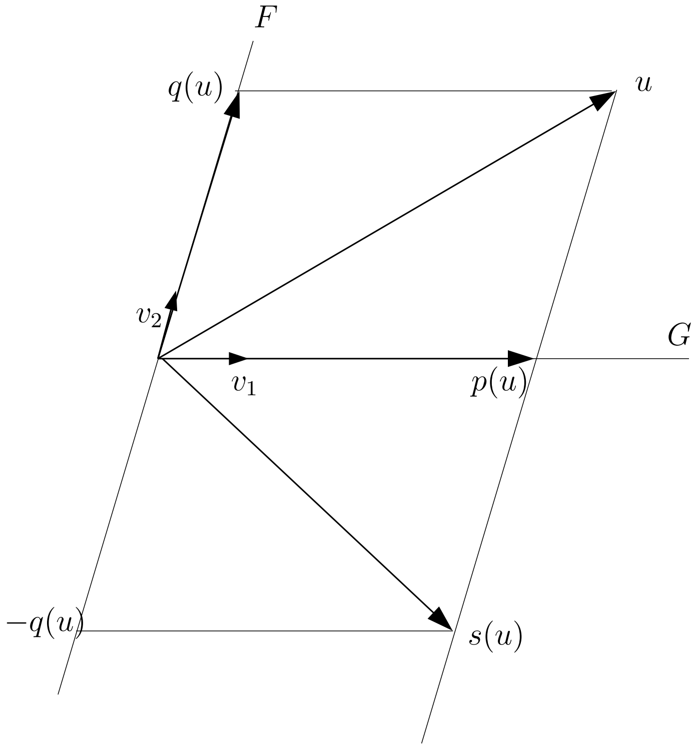

FIGURE 2.2 – Symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Preuve. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$, notons (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{aligned} s(u) &= p(u) - q(u) = p(xv_1 + yv_2) - q(xv_1 + yv_2) \\ &= xp(v_1) + yp(v_2) - xq(v_1) - yq(v_2) = xp(v_1) - yq(v_2) = xv_1 - yv_2. \end{aligned}$$

Pour déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s)$, il suffit de calculer $s(v_1)$ et $s(v_2)$:

$$s(v_1) = p(v_1) - q(v_1) = v_1, \qquad s(v_2) = p(v_2) - q(v_2) = -v_2.$$

■

2.3.3 Matrice d'une rotation

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice de la rotation d'angle θ dans la base canonique est (voir Figure **??**) :

$$M(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

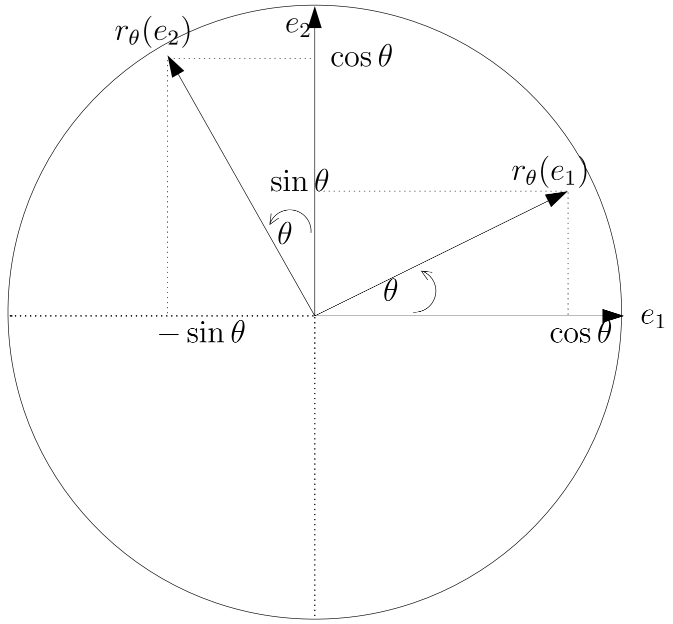

FIGURE 2.3 – Rotation d'angle θ.

2.4 Changement de base

2.4.1 Pour un vecteur

Exemple 2.4 (simple) *On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et on note $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ telle que $f_1 = 3e_1 + e_2$ et $f_2 = 5e_1 + 2e_2$. Soit u un vecteur de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$, cherchons les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$. On a :*

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = 3e_1 + e_2 \\ f_2 = 5e_1 + 2e_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e_1 = 2f_1 - f_2 \\ e_2 = -5f_1 + 3f_2. \end{array}\right.$$

Il vient

$$u = xe_1 + ye_2 = x(2f_1 - f_2) + y(-5f_1 + 3f_2) = (2x - 5y)f_1 + (-x + 3y)f_2$$

ou encore on obtient les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ par

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On remarquera que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'application identité par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)$.

Cas général Soit u un vecteur de E déterminé dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par ses coordonnées (connues)

$$u = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n.$$

Etant donné une nouvelle base $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$, nous souhaitons trouver les nouvelles coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$, dit autrement, nous cherchons $b_1, \ldots, b_n$ tels que

$$u = b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n.$$

Pour exprimer u dans $\mathcal{B}'$, il suffit d'exprimer chaque élément de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$. $\mathcal{B}'$ étant une base de E, on a :

$$\begin{cases} e_1 = p_{11} f_1 + \ldots + p_{n1} f_n \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n = p_{1n} f_1 + \ldots + p_{nn} f_n, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} b_1 = p_{11} a_1 + \ldots + p_{1n} a_n \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n = p_{n1} a_1 + \ldots + p_{nn} a_n. \end{cases}$$

On utilise généralement une écriture matricielle. Soit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & & & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & \ldots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{array}, \qquad u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad u_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

alors $u_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id}) u_{\mathcal{B}}$.

Proposition 2.8 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Etant donné u un vecteur de E, on note $u_{\mathcal{B}_1}$ (resp $u_{\mathcal{B}_2}$) le vecteur des coordonnées de u dans $\mathcal{B}_1$ (resp $\mathcal{B}_2$). On a alors :*

$$u_{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id}) u_{\mathcal{B}_2}, \qquad u_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id}) u_{\mathcal{B}_1}.$$

La matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})$ a pour colonnes les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_2$.

Proposition 2.9 *Les matrices $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})$ et $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})$ sont inverses l'une de l'autre, i.e.,*

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id}) M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id}) = \mathsf{id}.$$

Exemple 2.5 (important) *Soit $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ avec*

$$\begin{cases} b_1 = e_1 + e_2 \\ b_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ b_3 = 2e_2 + e_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ f_2 = -3e_2 - e_3 \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2 \end{cases}.$$

Déterminer les matrices $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})$ et $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})$.

On a

$$M_{\mathcal{B}_1,can}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}_2,can}(id) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Grâce au diagramme **??**,

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathsf{can}) \arrow[r, "\mathsf{id},\ M_{\mathsf{can},\mathcal{B}1}(\mathsf{id})"] \arrow[dr, "\mathsf{id}\ M_{\mathsf{can},\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \arrow[d, "\mathsf{id},\ M_{\mathcal{B}1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})"] \\
 & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.4 – Changement de bases

on obtient

$$M_{can,\mathcal{B}_2}(id) = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id) M_{can,\mathcal{B}_1}(id) \Longleftrightarrow M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id) = M_{can,\mathcal{B}_2}(id) M_{\mathcal{B}_1,can}(id).$$

On a donc

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 10 & -15 & -5 \\ -7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id) = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(id)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -0.2 & 1 \\ 1 & 0.2 & 1 \\ 1 & -1.2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Pour une matrice (ou une application linéaire)

Un exemple Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2), posons $u = (3, 1)$ et $v = (5, 2)$. Les vecteurs u et v forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Considérons alors l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par :

$$f(u) = 2u, \quad f(v) = -v.$$

Par rapport à la base $\mathcal{B}$, f a pour matrice une matrice diagonale :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant la matrice de f par rapport à la base canonique. Il est facile de voir que : $e_1 = 2u - v$ et $e_2 = 3v - 5u$. On en déduit :

$$\begin{cases} f(e_1) = 2f(u) - f(v) = 4u + v = 17e_1 + 6e_2 \\ f(e_2) = 3f(v) - 5f(u) = -3v - 10u = -45e_1 - 16e_2. \end{cases}$$

La matrice de f par rapport à la base canonique est donc :

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que la base $\mathcal{B}$ est mieux adaptée aux calculs sur l'application f. Montrons le sur deux exemples :

1. La matrice de f^5 dans la base $\mathcal{B}$ est facile à calculer :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^5) = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cas général On considère deux espaces vectoriels de dimension finie E et F, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F et une application linéaire $f : E \to F$. Le diagramme commutatif **??**

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "{f, M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)}"] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "{\mathsf{id}_F, M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathsf{id}_F)^{-1}}"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "{\mathsf{id}_E, M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)}"] \arrow[r, "{f, M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)}"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.5 – Changement de bases pour les applications linéaires : cas général.

donne la formule de changement de base pour l'application f :

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathsf{id}_F)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E).$$

Cas particulier : deux bases. Il arrive souvent que l'on considère des applications linéaires de E dans E. Dans ce cas, on connaît la représentation matricielle de f par rapport à une base $\mathcal{B}$ et on souhaite obtenir la représentation de f par rapport à une nouvelle base $\mathcal{B}'$. Dans ce cas là, le diagramme commutatif **??** :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "{f, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)}"] & (E,\mathcal{B}) \arrow[d, "{\mathsf{id}_E, M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)^{-1}}"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "{\mathsf{id}_E, M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)}"] \arrow[r, "{f, M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)}"'] & (E,\mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.6 – Cas particulier : $F = E$.

donne

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E).$$

Corollaire 2.3 (Cas de $\mathbb{R}^n$) *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.*

— *$det\big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\big) = det_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = det(f)$ (le déterminant de la matrice associée à f ne dépend pas de la base choisie). Ce déterminant est appelé déterminant de l'application linéaire f.*

— *f est inversible si et seulement si $det(f) \neq 0$ (dans ce cas, f est bijective).*

Application Les changements de base pour les applications linéaires peuvent être utilisés pour calculer les puissances ou les inverses de matrice :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)^{-1}$$

$$\Longrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^n = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)^n M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)^{-1}.$$

Cette formule reste encore valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$ quand f est inversible :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)^{-1} M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)^{-1}.$$

Exemple 2.6 *Appliquons les résultats précédents pour retrouver le changement de base de l'exemple du début de cette partie. On connaît $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et on cherche $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)$. On déduit du diagramme* **??**

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, "{f, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)}"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[d, "{\mathsf{id}, M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id})^{-1}}"] \\
(\mathbb{R}^2, \mathsf{can}) \arrow[u, "{\mathsf{id}, M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id})}"] \arrow[r, "{f, M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)}"'] & (\mathbb{R}^2, \mathsf{can})
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.7 – Un exemple dans $\mathbb{R}^2$.

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id})^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}).$$

On a

$$M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}.$$

Vocabulaire Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Les matrices $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id}_E)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}_E)$ sont appelées *matrices de passage*. Les lettres P et Q sont souvent utilisées pour noter ces matrices.

ATTENTION : étant donné un vecteur u dans E, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id})$ permet de calculer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ sachant ses coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$$u_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id}) u_{\mathcal{B}}.$$

L'usage est cependant d'appeler cette matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id})$ *matrice de passage de la base* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$.

Rappel : La matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id})$ a pour colonnes les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$ et la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id})$ a pour colonnes les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathsf{id}) = \begin{array}{c} \overline{e_1 \qquad\qquad e_n} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_n \end{array}, \qquad M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{array}{c} \overline{e'_1 \qquad\qquad e'_n} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Définition 2.6

— *2 matrices A_1 et A_2 sont semblables s'il existe une matrice carré P inversible telle que $A_1 = P^{-1} A_2 P$.*

— *De manière équivalente,* A_1 *et* A_2 *sont semblables s'il existe une application linéaire* $f : E \to E$ *et des bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *de* E *telles que :*

$$A_1 = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f), \qquad A_2 = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f).$$

La recherche d'une base bien adaptée au problème qu'on étudie est un thème important de l'algèbre linéaire. Si les calculs sont effectués dans une base mal adaptée au problème, ils peuvent rapidement devenir complexes. Il est donc nécessaire de développer des algorithmes permettant de se placer dans des bases où les calculs sont “simples”.

Chapitre 3

Réduction d'endomorphisme

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour certaines applications linéaires, il est possible de trouver des bases dans lesquelles les représentations matricielles de ces applications soient simples. Par exemple, pour $u = (3, 1)$ et $v = (5, 2)$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(u) = 2u, \qquad f(v) = -v$$

a pour représentation matricielle dans la base canonique :

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix},$$

alors que dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$, f est représentée par une matrice diagonale :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problème : Comment trouver des bases dans lesquelles les représentations matricielle des endomorphismes (applications linéaires de E dans E) sont diagonales ?

3.1 Valeurs propres et espaces propres

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endormorphisme de E. On cherche une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale. Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, cela signifie que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ ou encore $(f - \lambda I)(v_i) = 0$, v_i est donc un vecteur non nul de $\ker(f - \lambda I)$ et $f - \lambda I$ n'est pas injective.

Exemple 3.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $Au = (-5, -1)' \neq \lambda u$ et $Av = (4, 2) = 2v$. Existe-t-il d'autres vecteurs w tels que Aw soit colinéaire à w ?

Définition 3.1
1. *Un* **vecteur propre** *d'une matrice A est un vecteur non nul tel que : $Av = \lambda v$ pour un scalaire λ ;*
2. *Un scalaire λ est appelé* **valeur propre** *d'une matrice A lorsqu'il existe un vecteur v non nul tel que $Av = \lambda v$.*

Proposition 3.1 *Soit f un endomorphisme de E, A (resp. A') la représentation matricielle de f dans une base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Alors A et A' possèdent les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. Ces valeurs propres (resp. vecteurs propres) sont appelées valeurs propres (resp. vecteurs propres) de l'application linéaire f.*

Preuve. Soit v un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ. On note $v_{\mathcal{B}}$ (resp. $v_{\mathcal{B}'}$) le vecteur des coordonnées de V dans $\mathcal{B}$ (resp $\mathcal{B}'$). Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Il suffit de montrer $A'v_{\mathcal{B}'} = \lambda v_{\mathcal{B}'}$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "{f, A}"] & (E,\mathcal{B}) \arrow[d, "{\mathsf{id}, P^{-1}}"] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "{\mathsf{id}, P}"] \arrow[r, "{f, A'}"'] & (E,\mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Matrice de passage.

On a $A' = P^{-1}AP$ voir Figure **??** et aussi $v_{\mathcal{B}} = Pv_{\mathcal{B}'}$. Donc

$$A'v_{\mathcal{B}'} = P^{-1}APP^{-1}v_{\mathcal{B}} = P^{-1}Av_{\mathcal{B}} = \lambda P^{-1}v_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}'}.$$

■

Il est facile de savoir si un vecteur v est vecteur propre d'une matrice (il suffit de faire le calcul). Il est en revanche plus compliqué de savoir si un scalaire est une valeur propre. La proposition suivante nous donne un moyen de pallier à cette difficulté.

Proposition 3.2 *Un scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation vectorielle $(A - \lambda I)u = 0$ admet un vecteur non nul comme solution.*

Théorème 3.1 *Un scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si* $\det(A - \lambda I) = 0$. *Le polynôme en λ,* $\det(A - \lambda I)$ *est appelé polynôme caractéristique de A (ou de l'application linéaire f associée à A).*

Ce théorème nous permet de déterminer les valeur propres d'un endomorphisme f, il suffit pour cela de connaître sa représentation matricielle A par rapport à une base quelconque. Les valeurs propres de f sont alors les solutions de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$.

Exemple 3.2 *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les valeurs propres de A on résout :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -7.$$

Définition 3.2 (sous-espace propre associé à λ) *Si un scalaire λ est une valeur propre de A, le noyau* $\ker(A - \lambda I)$ *est appelé* **sous-espace propre** *de A associé à la valeur propre λ. Dit autrement, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est formé par les vecteurs v de E tels que $f(v) = \lambda v$ (f étant l'application linéaire associée à la matrice A).*

Exemple 3.3 *Déterminons les sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres de l'exemple précédent.*
Le sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$ est par définition le sous espace $\ker(f - 3I)$ *:*

$$E_{\lambda_1} = \ker(f - 3I) = \{u = (x, y)' : Au = 3u\}.$$

On résout le système suivant pour décrire déterminer E_{λ_1} :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3x \\ 3x - 6y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \end{cases} \iff x = 3y.$$

Par suite

$$E_{\lambda_1} = \left\{u = (x, y)' \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\right\} = \left\{y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\} = \mathsf{Vect}(3e_1 + e_2).$$

Par un raisonnement analogue, on trouve :

$$E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(-3e_1 + e_2).$$

On peut vérifier que dans la base $\mathcal{B} = (-3e_1 + e_2, 3e_1 + e_2)$, f a pour représentation matricielle

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

3.2 Diagonalisation

3.2.1 Condition suffisante

Proposition 3.3 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si le polynôme caractéristique de A admet n racines distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.*

Preuve. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines distinctes du polynôme caractéristiques et $v_1, \ldots, v_n$ les n vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E. Montrons par récurrence sur k que $(v_1, \ldots, v_k)$ est une famille libre de E. C'est clairement vrai pour $k = 1$. Supposons que ce soit vrai pour un entier k, $1 \leq k < n$ et montrons que $(v_1, \ldots, v_{k+1})$ est une famille libre de E. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ tels que :

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0, \tag{3.1}$$

on a, en prenant l'image par f :

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \tag{3.2}$$

La combinaison (**??**) $- \lambda_{k+1}$(**??**) s'écrit :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, chacun des coefficients de cette combinaison linéaire est nul et comme les λ_k sont deux à deux distincts, cela implique $\alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0$, ce qui reporté dans (**??**), donne $\alpha_{k+1} = 0$. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une famille libre de n éléments de E, c'est donc une base de E.

■

En pratique. Pour diagonaliser $f : E \to E$ dont le polynôme caractéristique de la matrice carrée $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ admet n racines distinctes, il faut :

1. Calculer le polynôme caractéristique en λ $\det(A - \lambda I)$;
2. Trouver les n racines de ce polynôme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;
3. Déterminer un vecteur v_i qui engendre l'espace propre E_{λ_i} ;
4. L'ensemble des vecteurs v_i forment une base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ de E et la matrice de f dans cette base est
$$D = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Question : si les n valeurs propres du polynôme caractéristique ne sont pas distinctes, peut-on diagonaliser A ?

3.2.2 Condition nécessaire et suffisante

Définition 3.3 *Soit λ_1 une racine d'un polynôme $P(\lambda)$. L'ordre de multiplicité de la racine λ_1 est égal au plus grand entier r tel qu'il existe un polynôme $Q(\lambda)$ tel que $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r Q(\lambda)$.*

Exemple 3.4
1. *$P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, -1 est racine d'ordre 2.*
2. *$P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12 = (x-2)^2(x+3)$, 2 est racine d'ordre 2, -3 est racine d'ordre 1.*

Théorème 3.2 *Soit A une matrice $n \times n$ admettant p valeurs propres distinctes.*
1. *Pour $1 \le k \le p$, la dimension de l'espace propre associé à λ_k est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_k.*
2. *La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.*

Corollaire 3.1 *Une matrice A est diagonalisable si et seulement si la dimension des espaces propres associés à chaque valeur propre λ_k est égal à l'ordre de multiplicité de λ_k.*

Exemple 3.5 *Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Le polynôme caractéristique de A est :
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2.$$
L'espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est défini par $\{v : A(v) = 0\}$, il faut donc résoudre le système :
$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$$

Donc

$$E_0 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$

L'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est défini par $\{v : A(v) = v\}$, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} y - z = x \\ -x + 2y - z = y \\ -x + y = z \end{cases} \iff -x + y - z = 0.$$

L'espace propre E_1 est de dimension 2, la matrice A est donc diagonalisable. Il reste à trouver une base de E_1, par exemple $v_2 = (1, 3, 2)$ et $v_3 = (1, 2, 1)$ (on peut en choisir d'autres). La matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc :

$$D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A = PDP^{-1}, D = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$:

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.6 *Considérons maintenant l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est encore $-\lambda(\lambda - 1)^2$. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est défini par les équations :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = x \\ 2x + 5y - 7z = y \\ x + 3y - 4z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ 2x + 4y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ y = y \\ z = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Par conséquent $E_1 = \mathsf{Vect}(e1 + 3e_2 + 2e_3)$ est de dimension 1. La dimension de E_1 n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 donc A n'est pas diagonalisable.

3.3 Triangularisation

Question : Que faire quand on ne peut diagonaliser un endomorphisme f ?

Une réduction qui paraît intéressante est la réduction d'une matrice à la forme triangulaire. On a le résultat suivant.

Proposition 3.4 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to F$ un endomorphisme de E. Si toutes les racines du polynôme caractéristique sont dans K, alors f est triangularisable.*

Corollaire 3.2 *Si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est triangularisable*

En pratique pour triangulariser un endomorphisme on procède de la manière suivante :

1. On calcule le polynôme caractéristique de f ;
2. On cherche les racines de ce polynôme, *i.e.*, les valeurs propres de f. Si toutes les racines sont dans K on peut triangulariser.
3. On recherche les espaces propres associés à chaque valeur propre.
4. On complète les vecteurs propres en une base de E.
5. On détermine la matrice de f par rapport à cette base.
6. On recommence la méthode sur la matrice d'ordre inférieur.

Exemple 3.7 *Triangulariser la matrice*

$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ d'ordre 1 et $\lambda_2 = 2$ d'ordre 2. Les espaces propres sont

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E_{λ_2} est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable. Néanmoins comme toutes les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$, elle est triangularisable dans $\mathbb{R}$. On pose $u_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $u_2 = e_1$ et on complète la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ en prenant $u_3 = e_3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire. Pour la calculer, il suffit de déterminer les coordonnées de $f(u_3) = f(e_3) = -e_2 + 4e_3$ dans $\mathcal{B}$, c'est à dire

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc trouver une base $\mathcal{B}$ par rapport à laquelle la matrice D associée à l'application linéaire f est triangulaire,

$$D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

Chapitre 4

Distance, norme, produit scalaire

4.1 Rappels

Considérons l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_1, x_2)'$ et $(y_1, y_2)'$. La norme euclidienne de x et y est :

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad ||y|| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

et la distance euclidienne entre les vecteurs x et y vaut :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \tag{4.1}$$

d'après Pythagore (voir Figure **??**).

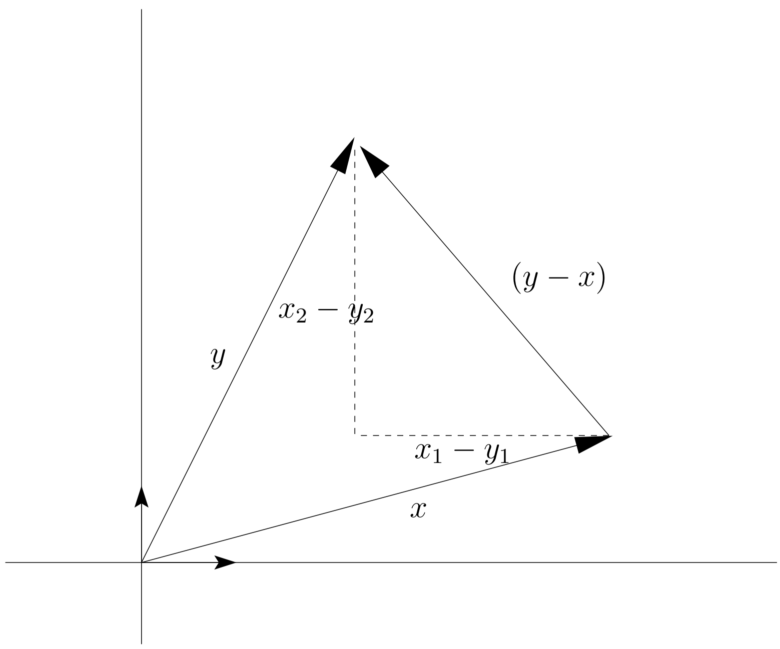

FIGURE 4.1 – Norme dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4.1 *La distance euclidienne* (**??**) *est définie à partir des coordonnées du vecteur* $(y-x)$ *dans la base euclidienne.*

Définition 4.1 (Distance) *Soit x, y et z trois vecteurs d'un espace vectoriel E. Une distance est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie :*
- *$d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;*
- *$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;*
- *$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).*

Plaçons nous maintenant dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ définie par $e'_1 = \ell_1 e_1$, e'_2 est de longueur ℓ_2 et l'angle entre e'_1 et e'_2 vaut α (voir Figure **??**).

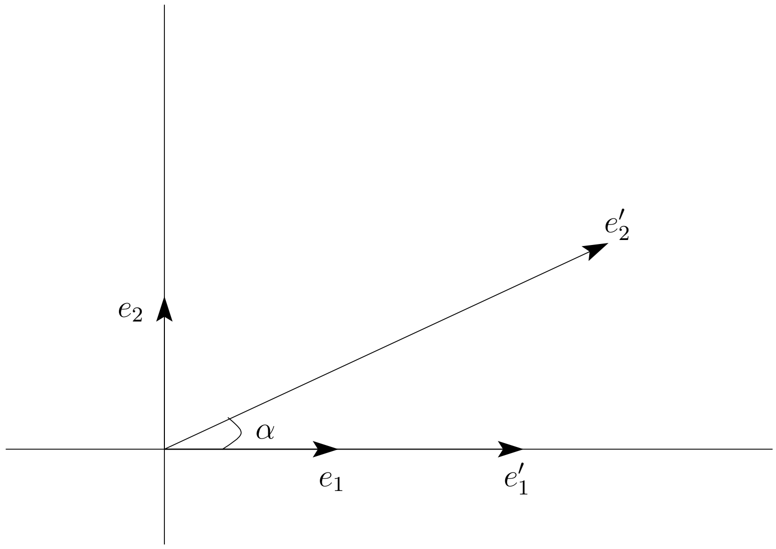

FIGURE 4.2 – Distance euclidienne et changement de base.

La matrice de passage de can à $\mathcal{B}$ est :

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \cos\alpha \\ 0 & \ell_2 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Si on note (x_1, x_2) et (y_1, y_2) les coordonnées de deux vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$, alors les coordonnées de $x - y$ dans la base canonique sont :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \cos\alpha \\ 0 & \ell_2 \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)\ell_1 + (x_2 - y_2)\ell_2 \cos\alpha \\ (x_2 - y_2)\ell_2 \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

La distance euclidienne entre x et y est donc :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 \ell_1^2 + (x_2 - y_2)^2 \ell_2^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ell_1 \ell_2 \cos\alpha}. \tag{4.2}$$

Remarque 4.2
- *Pour calculer une distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B}$, il suffit de connaître la longueur des éléments de la base ainsi que l'angle entre ces éléments. On applique ensuite la formule (**??**).*
- *La distance euclidienne entre x et y se récrit matriciellement comme suit :*

$$d^2(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1^2 & \ell_1 \ell_2 \cos\alpha \\ \ell_1 \ell_2 \cos\alpha & \ell_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Produit scalaire

4.2.1 Définition

Etant donné deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans la base canonique le produit scalaire est défini par

$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Remarque 4.3 — *Le produit scalaire $< x, y >$ dépend du choix de la base ;*

— *x et y sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$< x, y >=< y, x >$ (symétrique) ;*
2. *$< x + x', y >=< x, y > + < x', y >$ et $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$. On a donc par symétrie : $< x, y + y' >=< x, y > + < x, y' >$ et $< x, \lambda y >= \lambda < x, y >$.*

Nous allons maintenant généraliser la notion de produit scalaire à des espaces vectoriels.

Définition 4.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$:*

1. *bilinéaire : $\forall u, u', v, v' \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*
   — $\varphi(u + u', v) = \varphi(u, v) + \varphi(u', v)$;
   — $\varphi(u, v + v') = \varphi(u, v) + \varphi(u, v')$;
   — $\varphi(\lambda u, v) = \varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v)$.
2. *symétrie : $\forall u, v \in E, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.*
3. *définie : $\forall u \in E : \varphi(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.*
4. *positive : $\forall u \in E : \varphi(u, u) \geq 0$.*

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien s'il est de dimension finie, espace préhilbertien sinon.

Exemple 4.1

1. *L'exemple de base est celui de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On définit un produit scalaire en posant, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$:*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $E = Cont(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On définit un produit scalaire sur E en posant :*

$$< f, g >= \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

On notera que l'espace vectoriel E est ici de dimension infinie.

Application 1 : projection orthogonale d'un vecteur sur un axe. Soit u et v deux vecteurs non nuls de E. La projection orthogonale de v sur u est de la forme λu (voir Figure **??**), il faut trouver λ.

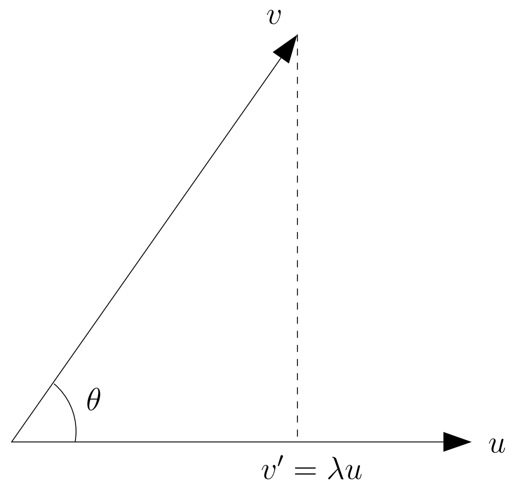

FIGURE 4.3 – Projection orthogonale sur un axe.

On a par construction $< u, v - \lambda u >= 0$. Il vient

$$< u, v > -\lambda < u, u >= 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{< u, v >}{< u, u >} = \frac{< u, v >}{||u||^2}.$$

Application 2 : cosinus d'un angle. Soit u et v deux vecteurs non nuls de E. Considérons la projection orthogonale $v' = \lambda u$ de v sur u. L'angle non orienté θ que forment u et v est un angle compris entre 0 et π, son cosinus est $\frac{\lambda ||u||}{||v||}$, soit :

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u|| \, ||v||}.$$

Définition 4.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive. Alors*

- *$\varphi(u, v)$ est le produit scalaire entre u et v ;*
- *$||u|| = \sqrt{\varphi(u, u)}$ est la norme euclidienne du vecteur u ;*
- *$d(u, v) = ||u - v||$ est la distance euclidienne entre u et v ;*
- *$\varphi(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u$ est φ-orthogonal à $v \Longleftrightarrow u \perp_\varphi v$.*

Remarque 4.4 *Toutes les normes ne sont pas euclidiennes : $d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \ldots, n\}$, $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.*

4.2.2 Ecriture matricielle du produit scalaire

Considérons deux vecteurs u et v de E ainsi que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E : $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Le produit scalaire entre u et v s'exprime en fonction des produits scalaire $\varphi(e_i, e_j)$ des vecteurs de base grâce à la bilinéarité :

$$\varphi(u, v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \varphi(e_i, e_j)$$

Ceci peut se ré-écrire sous forme matricielle :

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \dots & \varphi(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \dots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = U'MV.$$

La matrice M ci-dessus est appelée **matrice du produit scalaire** φ dans la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice carrée symétrique. Pour calculer le produit scalaire entre deux vecteurs, il suffit de connaître M.

Exemple 4.2 *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique le produit scalaire $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i v_i$ a pour représentation I_n.*

On remarque que le produit scalaire $\varphi(u,v)$ s'écrit :

$$\varphi(u,v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \varphi(e_i,e_i) + \sum_{1\le i<j\le n} (u_i v_j + u_j v_i)\varphi(e_i,e_j), \qquad \text{(par symétrie)}$$

et donc

$$\varphi(u,u) = \sum_{i=1}^n u_i^2 \varphi(e_i,e_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} u_i u_j \varphi(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n u_i^2 a_{ii} + 2\sum_{1\le i<j\le n} u_i u_j a_{ij},$$

avec $a_{ij} = \varphi(e_i,e_j)$.

Définition 4.4 *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. L'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(u) = \varphi(u,u)$ est appelée forme quadratique associée à φ.*

4.2.3 Comment reconnaître un produit scalaire ?

Nous allons exposer une méthode pour reconnaître si une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire. On commence par vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique (ce qui est en général facile). La difficulté est de savoir si φ est définie positive. Pour se faire, on étudie la forme quadratique associée à φ :

$$\begin{array}{rrl} q: & E \to & \mathbb{R} \\ & u \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n u_i^2 a_{ii} + 2\sum_{1\le i<j\le n} u_i u_j a_{ij} \end{array}$$

Exemple 4.3 *Prenons d'abord quelques exemples de forme φ définies sur $\mathbb{R}^3$. Si u a pour coordonnées (x,y,z) dans la base canonique, on a $\varphi(u,u) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ avec a,b,c,d,e,f réels.*

1. *Si $q(u) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$, il est clair que φ est définie positive.*
2. *Si $q(u) = x^2 - 3y^2 + 5z^2$, la forme φ n'est pas définie positive : pour $u = (0,1,0)$ on a $\varphi(u,u) < 0$.*
3. *Si $q(u) = x^2 + 3y^2$, φ n'est pas définie positive : pour $u = (0,0,1)$, on a $\varphi(u,u) = 0$.*
4. *Si $q(u) = 3xy + xz$, la forme φ n'est pas définie positive : pour $u = (1,-1,0)$, on a $\varphi(u,u) < 0$.*

Dans des cas plus complexes (par exemple lorsque la dimension de E est élevée), on utilise la méthode de Gauss pour étudier si une forme bilinéaire symétrique est définie positive.

Méthode de Gauss.

Etape 1 : On examine tous les a_{ii} et on vérifie qu'ils sont tous strictement positifs

Etape 2 : On transforme $q(u)$ en considérant d'abord tous les termes où u_1 apparaît. Pour ces termes, on met a_{11} en facteur et on obtient

$$q(u) = a_{11}(f_1(u))^2 + \varphi_1(u, u)$$

avec

$$f_1(u) = u_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} u_i.$$

$\varphi_1(u, u)$ est une forme quadratique où u_1 n'apparaît pas. On applique la même méthode avec les termes en u_2. On itère jusqu'à ce qu'il ne reste aucun terme.

Etape 3 : On obtient finalement une décomposition

$$q(u) = \alpha_1(f_1(u))^2 + \alpha_2(f_2(u))^2 + \ldots + \alpha_p(f_p(u))^2,$$

avec $f_1(u) = u_1 + \ldots$, $f_2(u) = u_2 + \ldots$, etc... (On écrit $q(u)$ comme une combinaison linéaire de p fonctions $f_p(u)^2$.)

Etape 4 : Conclusion :

1. Si $p = n$ et si, pour $1 \leq i \leq n$, on a $\alpha_i > 0$, alors φ est définie positive car $q(u) = 0$ équivaut à un système triangulaire de n équations :

$$\begin{cases} f_1(u) = 0 \\ \vdots \\ f_n(u) = 0 \end{cases}$$

qui admet $u = 0$ comme seule solution.

2. Si $p < n$ le système précédent est de rang inférieur à n et admet des solutions non nulles, donc φ n'est pas un produit scalaire.
3. Si $p = n$ et s'il existe i tel que $\alpha_i < 0$, il existe un vecteur u solution des équations $f_j(u) = 0, j \neq i$ et tel que $f_i(u) \neq 0$. On a $\varphi(u, u) < 0$ et φ n'est donc pas un produit scalaire.

Exemple 4.4 *La forme $\varphi(u, u) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ est-elle définie positive ?*

On utilise la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} \varphi(u, u) &= 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 4xz \\ &= 2(x^2 - 2xy + 2xz) + y^2 + 2z^2 - 2yz \\ &= 2(x - y + z)^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4yz + y^2 + 2z^2 - 2yz \\ &= 2(x - y + z)^2 - y^2 + 2yz \\ &= 2(x - y + z)^2 - (y - z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Un des α_i est négatif donc φ n'est pas définie positive (il suffit de prendre $u = (1, 1, 0), \varphi(u, u) = -1$).

4.2.4 Produit scalaire et changement de base

On considère E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Soit u et v deux vecteurs de E. On note

— u_i et v_i les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$;
— Φ_1 et Φ_2 les matrices d'un produit scalaire φ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
— $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$;
— $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

La question est ici de savoir comment passer de Φ_1 et Φ_2 (et réciproquement).

On rappelle que $u_1 = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})u_2$ et $u_2 = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id})u_1$. On a

$$\varphi(u, v) = u_1'\Phi_1 v_1 = (M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})u_2)'\Phi_1(M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})v_2) = u_2' M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})'\Phi_1 M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})v_2 = u_2'\Phi_2 v_2,$$

d'où

$$\Phi_2 = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id})'\Phi_1 M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id}).$$

Attention : il ne faut pas confondre matrice associée à un produit scalaire et matrice associée à une application linéaire !

Exemple 4.5 *Soit A une matrice symétrique définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formée par les vecteurs

$$\begin{cases} f_1 = 3e_1 - 2e_2 \\ f_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}.$$

On note

$$P = M_{\mathcal{B},can}(id) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Soit f l'application linéaire ayant pour représentation matricielle A par rapport à la base canonique. On a*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

2. *A est une matrice symétrique (définie positive). Soit ϕ le produit scalaire associé à la matrice A par rapport la base canonique. On note $\tilde{A}$ la matrice de ϕ par rapport à $\mathcal{B}$, on a*

$$\tilde{A} = P'AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ϕ et f n'ont clairement pas la même représentation par rapport à la base $\mathcal{B}$.

4.3 Norme et angle

Nous allons généraliser ici les notions de norme et d'angle aux espaces euclidiens.

Définition 4.5 (norme d'un vecteur) *Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on appelle norme de u le scalaire $||u|| =< u, u >^{1/2}$.*

Exemple 4.6 *Dans $\mathbb{R}^n$, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$, on a :*

$$||u|| = \left(\sum_{i=i}^{n} u_i^2\right)^{1/2}.$$

Dans $E = Cont(I, \mathbb{R})$ la norme de $f : I \to \mathbb{R}$ est :

$$||f|| = \left(\int_I f(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

Proposition 4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *1. Pour tous u et v de E on a :*

$$< u, v >^2 \leq ||u||^2\, ||v||^2 \quad \textit{ou encore} \quad | < u, v > | \leq ||u||\, ||v||.$$

2. Cas d'égalité : pour tous u et v de E, $< u, v >^2 = ||u||^2\, ||v||^2$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve. L'inégalité et le cas d'égalité sont évidents pour $u = 0$. Supposons $u \neq 0$.

1. Pour tout réel λ on a :

$$0 \leq ||v + \lambda u||^2 =< v + \lambda u, v + \lambda u >= ||v||^2 + 2\lambda < v, u > +\lambda^2 ||u||^2.$$

Le trinôme en λ est positif ou nul pour toutes les valeurs de λ, il a donc au plus une seule racine réelle. Son discriminant est par conséquent négatif ou nul (ce qui donne l'inégalité).

2. Notons v' la projection orthogonale de v sur u. Il suffit de montrer que $v' = v$. On a vu que $v' = \dfrac{< v, u >}{< u, u >} u$, donc :

$$||v - v'||^2 =< v - \frac{< v, u >}{< u, u >} u, v - \frac{< v, u >}{< u, u >} u >= ||v||^2 - \frac{< v, u >^2}{||u||^2} = 0.$$

Par conséquent $v - v' = 0$ et v est colinéaire à u.

∎

Proposition 4.2 (Propriétés de la norme) *Soit u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E et λ un réel.*

1. $||u|| \geq 0$;
2. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$;
3. $||\lambda u|| = |\lambda|\, ||u||$;

4. *Inégalité triangulaire :*

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||;$$

5. *Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : si $||u+v|| = ||u|| + ||v||$, il existe $\lambda > 0$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$;*
6. *Relation entre norme et produit scalaire :*

$$2 < u, v >= ||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2. \tag{4.3}$$

Preuve. Le seul point "délicat" est l'inégalité triangulaire qui se démontre à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}||u+v||^2 =& ||u||^2 + 2 < u, v > + ||v||^2 \\ \leq& < u, u > + 2| < u, v > | + < v, v > \\ \leq& ||u||^2 + 2||u|| \, ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2.\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz et si $< u, v >= | < u, v > |$, d'où le résultat.

■

On déduit de (**??**) le théorème de Pythagore.

Théorème 4.1 *Dans un espace muni d'un produit scalaire, deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si :*

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Définition 4.6 (angle de deux vecteurs) *Dans un espace muni d'un produit scalaire, on définit l'angle (non orienté) de deux vecteurs u et v non nuls comme le réel θ de $[0, \pi]$ tel que :*

$$\cos\theta = \frac{< u, v >}{||u|| \, ||v||}$$

ce qui est possible car ce rapport est dans $[-1, 1]$ d'après Cauchy-Schwartz.

Quand les deux vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire (et donc leur cosinus) est nul : leur angle est donc $\pi/2$. La réciproque est immédiate.

4.4 Orthogonalité

4.4.1 Définitions

Définition 4.7 *Deux vecteurs u et v d'un espace euclidien E sont orthogonaux si et seulement si $< u, v >= 0$.*

Définition 4.8 (Famille orthogonale) *Dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire, une famille $(e_1, \ldots, e_k)$ est dite orthogonale si $< e_i, e_j >= 0$ pour tous i, j avec $1 \leq i, j \leq k$ et $i \neq j$.*

Proposition 4.3 *Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, une famille orthogonale $(e_1, \ldots, e_k)$ sans vecteur nul est une famille libre.*

Preuve. Supposons qu'on ait $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k = 0$. Pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$ on a :

$$< \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k, e_i >= \lambda_i ||e_i||^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0.$$

■

Définition 4.9 (bases orthogonales et orthonormées) *Dans un espace euclidien E de dimension n, une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est dite :*
- *orthogonale si $< e_i, e_j >= 0$ pour tous i, j avec $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$;*
- *orthonormée si elle est orthogonale et si $||e_i|| = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale, la base $\left(\frac{e_1}{||e_1||}, \ldots, \frac{e_n}{||e_n||}\right)$ est orthonormée.

Calculs dans une base orthonormée Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ deux vecteurs de E et U et V les matrices colonnes associées. Alors
- $u_i =< u, e_i >$ pour tout $i = 1, \ldots, n$;
- $||u|| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{1/2}$;
- $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i v_i$;
- La matrice du produit scalaire est I_n et $< u, v >= U'V = V'U$.

Les calculs de norme, de produit scalaire s'effectuent de manière très simple dans des base orthonormées.

4.4.2 Construction de bases orthogonales : procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base. Le procédé d'orthogonalisation permet de construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthogonale $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que

$$\mathsf{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathsf{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i) \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

Une telle base $\mathcal{C}$ se construit par récurrence.

1. On pose d'abord $\varepsilon_1 = e_1$.

2. On construit ε_2 dans $\mathsf{Vect}(e_1, e_2)$ sous la forme $e_2 + \lambda\varepsilon_1$ en déterminant λ pour que ε_2 soit orthogonal à ε_1. On doit avoir $< \varepsilon_2, \varepsilon_1 >= 0$, ce qui donne (voir Figure **??**) :

$$< e_2 + \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_1 >= 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{< e_2, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2}.$$

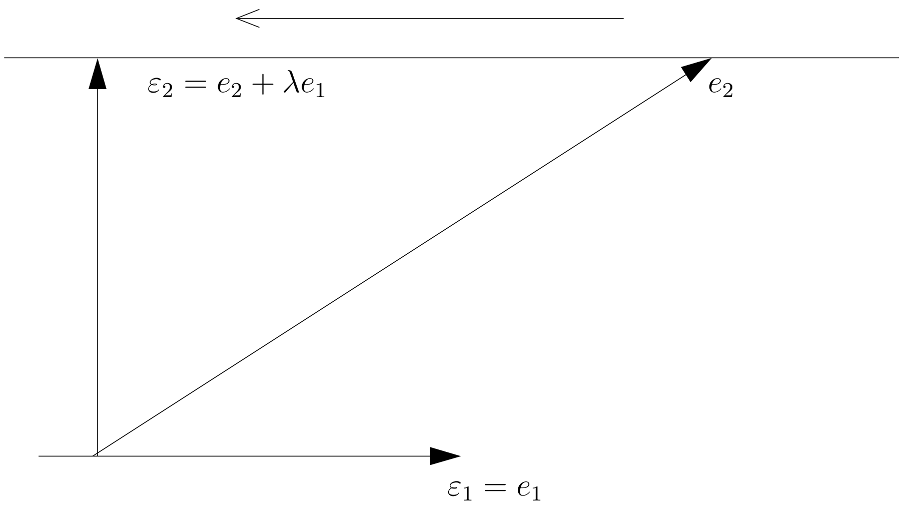

FIGURE 4.4 – Orthogonalisation de e_2.

3. Supposons la famille construite jusqu'au rang i. On cherche ε_{i+1} sous la forme $\varepsilon_{i+1} = e_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k \varepsilon_k$. Pour $1 \leq k \leq i$, la condition d'orthogonalité de ε_{i+1} et de ε_k donne
$$< \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_k >=< e_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \varepsilon_j, \varepsilon_k >=< e_{i+1}, \varepsilon_k > +\lambda_k < \varepsilon_k, \varepsilon_k >= 0,$$
d'où
$$\lambda_k = -\frac{< e_{i+1}, \varepsilon_k >}{||\varepsilon_k||^2}.$$
On détermine alors ε_{i+1}.
4. **Récapitulatif** :
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 \\ \varepsilon_2 = e_2 - \dfrac{< e_2, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_3 = e_3 - \dfrac{< e_3, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2} \varepsilon_1 - \dfrac{< e_3, \varepsilon_2 >}{||\varepsilon_2||^2} \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n = e_n - \dfrac{< e_n, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2} \varepsilon_1 - \dfrac{< e_n, \varepsilon_2 >}{||\varepsilon_2||^2} \varepsilon_2 - \ldots - \dfrac{< e_n, \varepsilon_{n-1} >}{||\varepsilon_{n-1}||^2} \varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de diviser chaque ε_i par sa norme.

Exemple 4.7 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par*
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Orthogonaliser $\mathcal{B}$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

On pose $\varepsilon_1 = e_1$. *Calculons* $\varepsilon_2 = e_2 - \dfrac{< e_2, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2}\varepsilon_1$:

$$< e_2, \varepsilon_1 >=< e_2, e_1 >= 3, \quad ||\varepsilon_1||^2 =< \varepsilon_1, \varepsilon_1 >= 14.$$

Donc

$$\varepsilon_2 = e_2 - \frac{3}{14}\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{14}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix}.$$

On vérifie $< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >= 11 - 27 + 16 = 0$.

Calculons $\varepsilon_3 = e_3 - \dfrac{< e_3, \varepsilon_1 >}{||\varepsilon_1||^2}\varepsilon_1 - \dfrac{< e_3, \varepsilon_2 >}{||\varepsilon_2||^2}\varepsilon_2$:

$$\begin{cases} < e_3, \varepsilon_1 >= 7, \quad ||\varepsilon_1||^2 = 14 \\ < e_3, \varepsilon_2 >= -\dfrac{7}{14}, \quad ||\varepsilon_2||^2 = \dfrac{19}{14}. \end{cases}$$

D'où

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{7}{14}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{7}{19}\frac{1}{14}\begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{38}\left[\begin{pmatrix}38\\76\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}19\\57\\38\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}30\\10\\-30\end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$< \varepsilon_3, \varepsilon_1 >= 0 \qquad et \qquad < \varepsilon_3, \varepsilon_2 >= 0.$$

La base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est orthogonale. On obtient une base orthonormée en divisant par la norme des vecteurs :*

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{||\varepsilon_1||} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{14}{19}}\frac{1}{14}\begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{266}}\begin{pmatrix}11\\-9\\8\end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \sqrt{\frac{1}{1900}}\begin{pmatrix}30\\10\\-30\end{pmatrix}.$$

Définition 4.10 (Sous-espaces orthogonaux) *Un vecteur u d'un espace euclidien E est orthogonal à un sous-espace F de E si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de F. L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F est appelé complément orthogonal de F (ou orthogonal de F) et est noté $F^\perp$:*

$$F^\perp = \{u \in E : u \perp w \, \forall w \in F\}.$$

Il est facile de vérifier que $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

Proposition 4.4 *Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

1. $E = F \oplus F^\perp$ *(tout élément u de E s'écrit $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$ et cette décomposition est unique) ;*
2. $\mathrm{dim}(F) + \mathrm{dim}(F^\perp) = \mathrm{dim}(E)$;
3. *Si G est un sous espace vectoriel et si $G \subset F$ alors $F^\perp \subset G^\perp$;*
4. $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve. 1. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F, on la complète pour obtenir une base $(e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_n)$ de E. On applique le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une nouvelle base de E $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ soit une base orthogonale de F.

Il suffit de montrer que $F^\perp = \mathsf{Vect}(\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$. Soit $u \in \mathsf{Vect}(\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$, u s'écrit $\lambda_{k+1}\varepsilon_{k+1} + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$. Soit w un vecteur de F, $w = \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_k\varepsilon_k$, comme $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est une base orthogonale, $< u, w >= 0$ et donc $u \in F^\perp$.

Soit maintenant $u = \sum_{i=1}^n u_i\varepsilon_i \in F^\perp$, clairement $< u, \varepsilon_i >= 0$ pour $1 \leq i \leq k$, donc $u = \sum_{i=k+1}^n u_i\varepsilon_i$, par conséquent $F^\perp \subset \mathsf{Vect}(\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$. On déduit $F^\perp = \mathsf{Vect}(\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ et donc $E = F \oplus F^\perp$.

2. c'est une conséquence directe du point précédent.
3. Soit $u \in \mathcal{F}^\perp$, u est orthogonal à tous les vecteurs de F et donc à tous les vecteurs de G puisque $G \subset F$, donc $u \in G^\perp$.
4. On a
$$\mathsf{dim}(F) + \mathsf{dim}(F^\perp) = \mathsf{dim}(E) = \mathsf{dim}(F^\perp) + \mathsf{dim}\left((F^\perp)^\perp\right),$$
donc $\mathsf{dim}\left((F^\perp)^\perp\right) = \mathsf{dim}(F)$. Soit $u \in F$, u est par définition orthogonal à $F^\perp$ donc $u \in \left((F^\perp)^\perp\right)$, d'où le résultat.

■

4.5 Projection orthogonale

Définition 4.11 *Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.*
- *On appelle projection orthogonale sur F la projection $\pi_F : E \to E$ sur F parallèlement à $F^\perp$.*
- *Pour tout vecteur u de E, $\pi_F(u)$ est appelé projeté orthogonal de u sur F.*
- *Pour tout vecteur u de E, $\pi_F(u) \in F$ et $u - \pi_F(u) \in F^\perp$ (voir Figure **??**).*

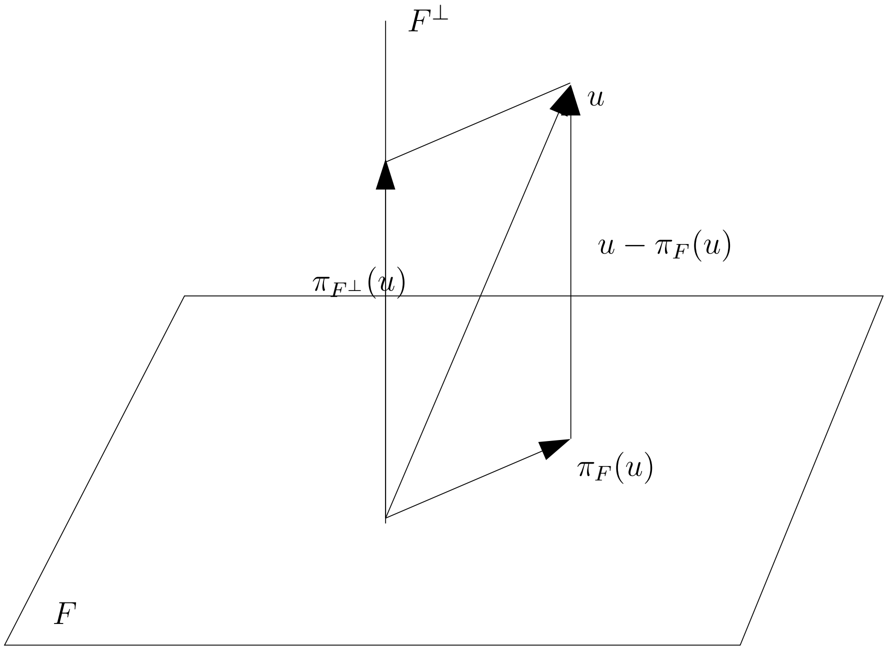

FIGURE 4.5 – Projection orthogonale sur F.

On remarquera que $\mathsf{id} - \pi_F$ est la projection sur $F^\perp X$ parallèlement à F. Le théorème de Pythagore nous donne
$$||u||^2 = ||\pi_F(u)||^2 + ||u - \pi_F(u)||^2,$$
par conséquent $||\pi_F(u)||^2 \leq ||u||^2$. L'égalité a lieu si et seulement si $||u - \pi_F(u)||^2 = 0$ donc si $\pi_F(u) = u$ donc si $u \in F$.

Proposition 4.5 *Pour tous u et v de E, on a $< \pi_F(u), v >=< u, \pi_F(v) >$.*

Preuve. Décomposons u et v dans la somme directe $E = F \oplus F^\perp$: $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in F$ et $u_2, v_2 \in F^\perp$. On a par construction $\pi_F(u) = u_1$ et $\pi_F(v) = v_1$. Donc
$$< \pi_F(u), v >=< u_1, v_1 + v_2 >=< u_1, v_1 >=< u, v_1 >=< u, \pi_F(v) > .$$

■

Proposition 4.6 (Projection sur une droite) *Soit F la droite vectorielle engendrée par un vecteur u non nul. Alors*
$$\pi_F(v) = \frac{< v, u >}{< u, u >} u.$$

Preuve. $\pi_F(v)$ est de la forme λu. En remarquant que $< v - \pi_F(v), u >= 0$, on obtient le résultat.

■

Matrice de la projection sur un sous-espace. Soient E un espace euclidien de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Choisissons une base orthogonale $(e_1, \dots, e_k)$ de F et complétons-la en une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. On a par construction
$$\pi_F(e_i) = e_i \text{ si } 1 \leq i \leq k \text{ et } \pi_F(e_i) = 0 \text{ si } k + 1 \leq i \leq n.$$
On déduit que
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Distance à un sous-espace. Soit E un espace euclidien de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. On définit la distance d'un vecteur u de E à F par :
$$d(u, F) = ||u - \pi_F(u)||.$$

Proposition 4.7 *Pour tout v de F, on a $||u - v|| \geq d(u, F)$, l'égalité ayant lieu que si $v = \pi_F(u)$.*

Preuve. On a $u - v = u - \pi_F(u) + \pi_F(u) - v$. Comme $u - \pi_F(u) \in F^\perp$ on a $(u - \pi_F(u)) \perp (\pi_F(u) - v)$. En appliquant Pythagore, on obtient :
$$||u - v||^2 = ||u - \pi_F(u)||^2 + ||\pi_F(u) - v||^2.$$

■

Géométriquement, cette proposition signifie que quand on s'éloigne dans F du pied de la perpendiculaire abaissée de u sur F, on augmente la distance. On peut considérer cette proposition comme un résultat d'approximation : l'élément de F le plus proche de u est le projeté orthogonal de u sur F.

Exemple 4.8 (Application à la méthode des moindres carrés) *Dans de nombreuses situations, nous sommes amener à rechercher des relations de la forme $y = ax + b$ entre deux variables x et y. On dispose de couples de valeurs $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ qui conduisent généralement à un système d'équations $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$ incompatibles. On recherche donc a et b qui satisfassent au mieux ces équations. Une première idée consisterait à minimiser la somme des écarts*

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|,$$

ce qui en pratique ne conduit pas à des calculs faciles. On préfère souvent minimiser la somme des carrés des écarts :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Posons $u = (x_1, \dots, x_n)'$, $v = (y_1, \dots, y_n)'$; $w = (1, \dots, 1)'$, nous cherchons un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de la forme $au + bw$ qui soit le plus proche de v au sens de la norme euclidienne. Nous cherchons donc à minimiser la distance entre v et $F = \mathsf{Vect}(u, w)$, le minimum est atteint lorsque $au + bw = \pi_F(v)$.

Chapitre 5

Transformations orthogonales et matrices symétriques

5.1 Transformations orthogonales

5.1.1 Définition

Nous nous intéressons dans cette partie aux applications qui conservent le produit scalaire.

Proposition 5.1 *Soient E et E' deux espaces euclidiens. Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f conserve les produits scalaires, c'est à dire que pour tous u et v de E, on a $< f(u), f(v) >=< u, v >$;*
2. *f conserve les normes, c'est à dire que pour tout u de E on a $\|f(u)\| = \|u\|$.*

Une application linéaire qui vérifie une de ces deux conditions est appelée application (ou transformation) orthogonale.

Preuve. Si la première condition est vérifiée, on a :

$$\|f(u)\|^2 =< f(u), f(u) >=< u, u >= \|u\|^2.$$

Si la seconde condition est vérifiée, alors

$$2 < f(u), f(v) >= \|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 2 < u, v > .$$

■

Proposition 5.2 (Matrices des transformations orthogonales) *Soit E une espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f : E \to E$ une application linéaire. On pose $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*

1. *Si f est une transformation orthogonale, la matrice A :*
   - *est inversible ;*
   - *vérifie $A'A = AA' = I$, autrement dit $A^{-1} = A'$;*
   - *est telle que $\det(A) = 1$ ou -1.*
2. *Si A vérifie $A'A = AA' = I$, autrement dit si $A^{-1} = A'$, alors f est une transformation orthogonale.*

Une matrice A qui vérifie une de ces deux conditions est appelée matrice orthogonale.

Preuve. 1. Soit f une transformation orthogonale, alors

$$\ker f = \{u \in E : f(u) = 0\} = \{u \in E : \|f(u)\| = 0\} = \{u \in E : \|u\| = 0\} = \{0\}$$

donc f est injective et donc bijective. A est donc inversible. Soit u et v deux vecteurs de E de coordonnées U et V dans $\mathcal{B}$. Comme $< f(u), f(v) >=< u, v >$ on a

$$(AU)'AV = U'A'AV = U'V,$$

d'où $A'A = I$ et par conséquent $(\det(A))^2 = 1$.

2. De même, pour deux vecteurs u et v dans E on a :

$$< f(u), f(v) >= (AU)'AV = U'A'AV = U'V =< u, v > .$$

■

5.1.2 Comment reconnaître une matrice orthogonale ?

Proposition 5.3 *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, $f : E \to E$ une application linéaire et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$. Alors :*

1. *f est une transformation orthogonale si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.*
2. *A est une matrice orthogonale si et seulement si :*
   — *le produit scalaire entre les vecteurs colonnes de A est nul ;*
   — *les vecteurs colonnes de A sont de normes 1.*

Preuve. Il est évident que 1 et 2 sont équivalents. Montrons 1.

— Soit f une transformation orthogonale. Alors $\forall i = 1, \ldots, n$, $\|f(e_i)\| = \|e_i\| = 1$ et $\forall i \neq j$ $< f(e_i), f(e_j) >=< e_i, e_j >= 0$.

— Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ deux vecteurs de E. On a

$$\begin{aligned} < f(u), f(v) > &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right), f\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right)\right\rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} u_i v_j < f(e_i), f(e_j) > \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} u_i v_j =< u, v > . \end{aligned}$$

■

Corollaire 5.1 *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage $P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)$ est une matrice orthogonale.*

Définition 5.1 *Une matrice A est dite orthogonalement diagonalisable s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP' = PDP^{-1}$.*

Si la matrice A est orthogonalement diagonalisable, on n'a pas à inverser la matrice de passage pour calculer A^n par exemple.

Attention : Dans ce chapitre, nous parlons de diagonaliser une matrice associée à une application linéaire. Il ne faut pas confondre avec la diagonalisation d'une matrice de produit scalaire

Exemple 5.1 *Soit f une application linéaire de R^3 dans R^3 telle que*

$$A = M_{can,can}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 3$. A est donc diagonalisable. Les espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E_{\lambda_3} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres sont bien orthogonaux. Si on veut que la matrice de passage soit orthogonale, il faut qu'ils soient de norme 1, d'où

$$P = M_{\mathcal{B},can}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

On a maintenant $P^{-1} = P$ et $A = PDP'$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2 Diagonalisation de matrices symétriques

Définition 5.2 *Une matrice A est symétrique si et seulement si $A' = A$.*

Théorème 5.1 *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et f une application linéaire telle que la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ soit symétrique. Alors*

1. *Les valeurs propres de A sont réelles ;*
2. *La dimension des sous-espaces propres associée à chaque valeur propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée (A est donc diagonalisable).*
3. *Les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux ;*
4. *A est orthogonalement diagonalisable.*

Exemple 5.2 (Valeur propre multiple) *Soit*

$$A = M_{can,can}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = -2$ est valeur propre simple et $\lambda_2 = 7$ est valeur propre double. Les sous-espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathsf{Vect}(f_1), E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathsf{Vect}(f_2, f_3).$$

Les vecteurs propres présentés ainsi ne sont pas orthogonaux, on utilise Gram-Schmidt :

$$\tilde{f_3} = f_3 - \frac{< f_3, f_2 >}{\|f_2\|^2} f_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{B} = \left(\frac{f_1}{\|f_1\}}, \frac{f_2}{\|f_2\|}, \frac{\tilde{f_3}}{\|\tilde{f_3}\|} \right)$ *est orthonormée, donc*

$$P = M_{\mathcal{B},can}(id) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

5.3 Retour au produit scalaire

Soit E un espace euclidien et φ une forme bilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice associée à φ par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a vu au chapitre précédent qu'il fallait utiliser la méthode de Gauss pour vérifier si φ est un produit scalaire. Le théorème suivant fournit une nouvelle méthode pour vérifier ce fait.

Théorème 5.2 *La forme bilinéaire φ est définie positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.*

Preuve. A est une matrice symétrique, elle est donc orthogonalement diagonalisable. Il existe donc D une matrice diagonale et une matrice $P = M_{B',B}(\mathrm{id})$ orthogonale telles que $D = P'AP$. D est la matrice de φ par rapport à $\mathcal{B}'$. Soit u un vecteur de E, on note $U = (u_1, \ldots, u_n)'$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. Soit q la forme quadratique associée à φ, on a alors :

$$q(u) = U'DU = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. φ est donc définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres sont strictement positives.

■

Exemple 5.3 *A l'aide de la méthode de Gauss puis du théorème précédent, vérifier si la forme bilinéaire symétrique*

$$\varphi(u, v) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_2$$

est définie positive.

Méthode de Gauss :

$$q(u) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz = 3\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}(y + 3z)^2 - 5z^2.$$

φ n'est donc pas un produit scalaire.

Valeurs propres : *La matrice de φ par rapport à la base canonique est :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres sont 5, 2 et -1. On retrouve bien que φ n'est pas un produit scalaire.

Annexe A

Récapitulatif sur les changements de base

Nous récapitulons dans cette partie les différents changements de base étudiés à travers des exemples simples dans $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de deux bases

— $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ est la base canonique ;

— $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$ est la base formée des vecteurs

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + 3e_2 \\ f_2 = 2e_1 + e_2. \end{cases}$$

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$:

$$P = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ est

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

A.1 Vecteur

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$. u est un objet **fixé**. On l'identifie par ses coordonnées qui dépendent de la base dans laquelle on travaille. Supposons par exemple que le vecteur u a pour coordonnées $(1, 2)'$ dans la base canonique. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ sont :

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\mathsf{id}) = P^{-1}u_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

A.2 Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. f est un objet fixé et $f(u)$ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$, bien entendu les coordonnées de $f(u)$ dépendent de la base dans laquelle on se place. On suppose que f a la représentation matricielle suivante dans la base canonique

$$A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a deux moyens de déterminer les coordonnées de $v = f(u)$ dans $\mathcal{B}_2$:

1. On calcule les coordonnées dans $f(u)$ dans $\mathcal{B}_1$ puis on déduit les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}_2$:
$$v_{\mathcal{B}_1} = Au_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_{\mathcal{B}_2} = P^{-1}v_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
2. On calcule la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}_2$:
$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 41 & 27 \end{pmatrix}, \quad v_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f)u_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A.3 Produit scalaire

Soit v de coordonnées $(4,1)$ dans $\mathcal{B}_1$, le produit scalaire $< u, v >$ est fixé. On peut le calculer de deux maniéres :

1. Dans $\mathcal{B}_1$:
$$< u, v >= 4 \times 1 + 2 \times 1 = 6.$$
2. Dans $\mathcal{B}_2$, on calcule d'abord la matrice Φ du produit scalaire par rapport à $\mathcal{B}_2$:
$$\Phi = P'IP = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$
$$v_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 2.2 \end{pmatrix}, \quad < u, v >= u'_{\mathcal{B}_2}\Phi v_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.4 \\ 2.2 \end{pmatrix} = 6.$$

Annexe B

Annales

Cette partie comporte les sujets d'examens des dernières années acompagnés de quelques corrigés.

UFR Sciences Sociales - Département MASS
Année Universitaire 2004-2005

1ère Session : Juin 2005

- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : MA 421 F
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☐ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Eric Matzner-Løber
- **Documents autorisés** : aucun

Exercice 1
Nous considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
2. Les sous-espace propres sont-ils orthogonaux ? Ce résultat est-il surprenant ?
3. A est-elle diagonalisable ? Si la réponse est positive donnez sa forme diagonale et la matrice de passage correspondante.
4. A est-elle inversible ? Si la réponse est positive donnez son inverse.
5. A est-elle orthogonalement diagonalisable ? Si la réponse est positive, donnez sa forme diagonale et la matrice de passage correspondante. Quelle est la différence entre la matrice de passage trouvée à la question 3 et celle que vous venez de trouver ?
6. Donnez le lien entre la trace de A et la somme de ses valeurs propres et démontrez-le.
7. Question similaire de la précédente mais avec le déterminant de A et ? ? ? de ses valeurs propres, trouvez ? ? ? et démontrez ce résultat.

Exercice 2
Considérons les suites définies par les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \end{cases}$$

1. Calculez u_1 et v_1 lorsque $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.
2. Calculez ensuite u_{30} et v_{30}.

Exercice 3
Considérons $E = \mathbb{R}^3$, les formes suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$\begin{aligned}
\phi_1(u,v) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3 \\
\phi_2(u,v) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 - u_3v_3 \\
\phi_3(u,v) &= 3u_1v_1 + 14u_2v_2 + 8u_3v_3 + 6u_1v_2 - 3u_1v_3 - 4u_2v_3 + 6u_2v_1 - 3u_3v_1 - 4u_3v_2 \\
\phi(u,v) &= u_1v_1 + 6u_2v_2 + au_3v_3 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 - 3u_1v_3 - 3u_1v_3.
\end{aligned}$$

Si la réponse est positive, donnez la matrice associée, si la réponse est négative, donnez un vecteur ne satisfaisant pas la condition voulue.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension n dont une base est $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit F un sous-espace de E de dimension p engendré par les vecteurs $(f_1, \cdots, f_p)$. Le produit scalaire entre 2 éléments x et y de E est définie par

$$\phi(x,y) = x'My,$$

où M est une matrice symétrique définie positive.

1. En redémontrant la méthode directe (dessin, explications claires ...), donnez la forme de la matrice de la projection orthogonale (ou M-orthogonale) sur F.
2. Retrouvez ce résultat avec la méthode classique (base orthogonale, matrice de passage...) en indiquant très clairement ce que vous faites.

Nous sommes dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $u_1' = (1,-1,1,-1)$ et $u_2' = (1,1,-1,-1)$.

3. Donnez la matrice M.
4. Trouvez u_3 et u_4 tels que les vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
5. Trouvez la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par u_1 et u_2.
6. Que vaut la trace de cette matrice ?
7. Trouvez la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par u_3 et u_4.

Exercice 5
Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient t_0, t_1, t_2, t_3, 4 nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_3$, posons

$$< P, Q > = P(t_0)Q(t_0) + \cdots + P(t_3)Q(t_3).$$

1. Montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathcal{P}_3$.
2. Soit $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ et $t_3 = 2$, donnez la matrice M associée au produit scalaire.
3. Considérons $\mathcal{P}_2$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_3$, de base $\{1, X, X^2\}$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2$. Faites un dessin.
4. Même question pour $Q(X) = 3X + 2X^2$.

UFR Sciences Sociales - Département MASS
Année Universitaire 2005-2006

$1^{ère}$ Session : Juin 2006

- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : MA 421 F
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☒ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Eric Matzner-Løber
- **Documents autorisés** : aucun

Question de cours : Soit E un espace vectoriel de dimension n dont une base est $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit F un sous-espace de E de dimension p engendré par les vecteurs $(f_1, \cdots, f_p)$. Le produit scalaire entre 2 éléments x et y de E est défini par :

$$\phi(x, y) = x' My,$$

où M est une matrice symétrique définie positive.

En redémontrant la méthode directe (dessin, explications claires ...), donnez la forme de la matrice de la projection orthogonale (c'est-à-dire M-orthogonale) sur F.

Exercice 1
On considère deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ définis dans la base canonique par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(\vec{e_1}) & = & -\vec{e_2} - \vec{e_3} \\ f(\vec{e_2}) & = & \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) & = & -\vec{e_1} - \vec{e_2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} g(\vec{e_1}) & = & \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} \\ g(\vec{e_2}) & = & 2\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 3\vec{e_3} \\ g(\vec{e_3}) & = & -3\vec{e_1} - 7\vec{e_2} - 4\vec{e_3}. \end{array}\right.$$

1. Donnez la matrice de f dans la base canonique, notée A_f.
2. Déterminez les valeurs propres de A_f (il y a une valeur propre double).
3. Déterminez les vecteurs propres de A_f.
4. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
5. Donnez la matrice A_f dans la base des vecteurs propres (rangés par ordre croissant des valeurs propres) en indiquant clairement le produit matriciel qu'il faut effectuer (on ne demande pas l'inverse de la matrice de passage).
6. Donnez la matrice de g dans la base canonique notée A_g.
7. Déterminez les valeurs propres de A_g (il y a une valeur propre double).
8. Déterminez les vecteurs propres de A_g.
9. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

10. Compléter votre famille libre de vecteurs propres et donnez la matrice A_g dans la base complétée en indiquant clairement le produit matriciel qu'il faut effectuer (on ne demande pas l'inverse de la matrice de passage). Vous venez de voir une manière d'obtenir une matrice triangulaire.

Exercice 2

Un petit scarabée se déplace sur un triangle, dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, 3\}$. A l'instant n, s'il est au sommet i, il va vers le sommet j avec la probabilité p_{ij}, où il se retrouve à l'instant $(n + 1)$. Si $i = j$, il reste sur place. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$ est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

On admet que la probabilité d'être à l'instant n au sommet j sachant que le scarabée est initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) au sommet i est donnée par le terme (i, j) de la matrice P^n.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P^n$.
2. Interpréter le résultat.

Exercice 3

Nous sommes dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)'$ et $u_2 = (1, 1, -1, -1)'$.

1. Trouvez u_3 et u_4 tels que les vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
2. Trouvez la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par u_1 et u_2, notée Π_{12}.
3. Trouvez la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par u_1, notée Π_1.
4. Trouvez la matrice de la projection orthogonale sur l'espace engendré par u_2, notée Π_2.
5. Voyez-vous un lien entre (Π_1, Π_2) et Π_{12} ?
6. Pourquoi ?

Exercice 4

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_3$, considérons le produit scalaire défini par

$$< P, Q > \quad = \quad \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Donnez la matrice M associée à ce produit scalaire.
2. Donnez une base orthogonale de $\mathcal{P}_3$. Vous venez alors de trouver les polynômes de Legendre (1752-1833).
3. Soit $\mathcal{P}_1$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1. Soit Q l'élément de $\mathcal{P}_1$ qui minimise $\|P - Q\|^2$ où $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$. Trouvez le polynôme Q.
4. Donnez la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_1$.
5. Projetez le polynôme $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$ dans $\mathcal{P}_1$ et retrouvez le polynôme Q.
6. **(bonus)** Quelle est la meilleure approximation de la fonction $\cos(x)$? Ce résultat vous semble-t-il réaliste ?

UFR Sciences Sociales - Département AES
Année Universitaire 2006-2007

1ère Session : Juin 2007

- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : MA421F
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☒ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Laurent Rouvière
- **Documents autorisés** : aucun.

Exercice 1
Vrai ou Faux ?+0.5 pour une bonne réponse, -0.5 pour une mauvaise réponse. Ne pas justifier les réponses.

1. Si deux vecteurs sont orthogonaux, ils sont linéairement indépendants.
2. Si un vecteur u coïncide avec sa projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F, alors u est dans F.
3. Deux vecteurs propres disctincts d'une même application linéaire sont linéairement indépendants.
4. Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Exercice 2
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ f(e_2) = -e_1 - 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée can. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, -1, 2)$ dans la base canonique et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs

$$u_1 = e_1 + e_2, \quad u_2 = e_2 + e_3, \quad u_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Donner $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)$ la matrice de f dans la base canonique.
2. (a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelles sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$?
3. (a) Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f. Donner les valeurs propres associés.

(b) Déduire de la question précédente $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$.

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer V_0, V_1, V_2.
2. Grâce à la relation de récurrence sur $(u_n)_{n\geq 0}$, trouver une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \geq 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire V_n en fonction de V_0, A et n.
4. Diagonaliser A. En déduire V_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 4
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -1, 1)$

1. Donner les coordonnées de la projection orthogonale de u_2 sur $\mathsf{Vect}(u_1)$.
2. On note π la projection orthogonale sur $F = \mathsf{Vect}(u_1, u_2)$.
   (a) Compléter la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ orthogonale telle que $\mathsf{Vect}(u_1, u_2) = \mathsf{Vect}(v_1, v_2)$.
   (c) Quelle est la matrice de π par rapport à la base $\mathcal{B}$?
   (d) Calculer la matrice de π par rapport à la base canonique.
3. Soit v le vecteur de coordonnées $(1, 2, 4)$ dans la base canonique. Donner les coordonnées (dans la base canonique) du vecteur de F qui minimise la distance entre v et F.

Exercice 5
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f une transformation **orthogonale** de $\mathbb{R}^2$. On note A la matrice de f par rapport à la base canonique :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les réels a, b, c et d vérifient les relations

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

Les deux premières relations ci dessus montrent qu'il existe deux réels θ et θ' tels que

$$\begin{cases} a = \cos\theta & c = \sin\theta \\ b = \cos\theta' & d = \sin\theta'. \end{cases}$$

2. En utilisant la troisième relation, montrer que
$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \theta' = \theta - \frac{\pi}{2}.$$
3. Dans le cas où $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, caractériser géométriquement l'application f.
4. On suppose dans cette question $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ avec $0 < \theta < \pi$.
   (a) Ecrire la matrice A en fonction de θ uniquement.
   (b) Quelles sont les valeurs propres de f.
   (c) En déduire que f est une symétrie orthogonale (on ne demande pas de préciser par rapport à quel axe). On rappelle que dans $\mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\mathsf{Vect}(u)$ est l'application linéaire s telle que $s(u) = 0$ et $s(v) = -v$ pour tout vecteur v orthogonal à u.
   (d) Donner un vecteur qui engendre l'axe de la symétrie lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$.
   (e) Donner un vecteur qui engendre l'axe de la symétrie dans le cas général (on donnera les coordonnées de ce vecteur en fonction de θ dans la base canonique).

Correction

Exercice 1
V-V-F-V

Exercice 2

1. La matrice de f par rapport à la base canonique est :

$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit P la mtrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

det $P = 1 \neq 0$ dont $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Les coordonnées de $f(u)$ dans can sont :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ sont :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Il suffit de calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$:

$$f(u_1) = 2e_1 + 2e_2 = 2u_1, \quad f(u_2) = e_2 + e_3 = u_2, \quad f(u_3) = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3 = 3u_3.$$

u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres $2, 1, 3$.

(b) On déduit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Grâce à la relation de récurrence $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$, on trouve : $u_2 = -1$, $u_3 = 3$, donc $V_0 = [0,1]'$, $V_1 = [1,-1]'$, $V_2 = [-1,3]'$.
2. On a la relation de récurrence d'ordre 1 : $V_{n+1} = AV_n$, avec
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
3. On en déduit que :
$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = A^n V_0.$$
4. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$. Les espaces propres sont définis par :
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On pose
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
on a
$$V_n = A^n V_0 = PD^nP^{-1}V_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 2-(-2)^{n+1} & 1-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n+1 \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$u_n = 1-(-2)^n.$$

Exercice 4

1. La projection orthogonale de u_2 sur $\mathsf{Vect}(u_1)$ est
$$\frac{< u_2, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 = \frac{1}{3}(1,1,1)'.$$
2. (a) On complète la famille (u_1, u_2) par $e_3 = (0,0,1)'$.
   (b) On trouve $\mathcal{B}$ par Gram-Schmidt :
$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 = (1,-1,1)' - \frac{1}{3}(1,1,1)' = \frac{1}{3}(2,-4,2),$$
$$v_3 = u_3 - \frac{< u_3, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 - \frac{< u_3, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2 = (0,1,1)' - \frac{1}{3}(1,1,1)' - \frac{1}{4}\frac{1}{3}(2,-4,2) = \frac{1}{2}(-1,0,1).$$
   On pose :
$$v_1 = (1,1,1)', v_2 = (1,-2,1)', v_3 = (-1,0,1).$$

(c) La matrice de π par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit

$$P = M_{B,can}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a alors

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\pi) = PM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\pi)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Le vecteur de F qui minimise $d(v; F)$ est la projection orthogonale de v sur F ($\pi(v)$). Il suffit donc de calculer

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. A est une matrice orthogonale, donc $A'A = Id$, d
2. La troisième relation donne :

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0 \Longleftrightarrow \cos(\theta - \theta') = 0,$$

c'est à dire

$$\theta - \theta' = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \theta - \theta' = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Si $\theta' = \theta + \frac{pi}{2}$, alors

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

f est alors la rotation d'angle θ.

4. (a) Dans ce cas, on a

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres sont 1 et -1.

(c) Soit ε_1 (resp. ε_2) le vecteur propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1). On a alors $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ et $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_1$. f est donc la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathsf{Vect}(\varepsilon_1)$.

(d) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $\varepsilon_1 = (1, 1)$. f est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

(e) Si on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il faut trouver la symétrie orthogonale qui transforme e_1 en $f(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$, ce qui donne $\varepsilon_1 = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$.

UFR Sciences Sociales - Département MASS
Année Universitaire 2007-2008

$1^{ère}$ Session : Mai 2008
- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : MA421F
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☒ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Laurent Rouvière
- **Documents autorisés** : aucun.

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (Questions de cours, 5 points)

1. Soit f une application linéaire.
   (a) Rappeler la définition d'une fonction injective.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si $\mathbf{ker} f = \{0\}$.
2. Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Montrer que le projeté orthogonal de v sur u est :
$$\frac{< u, v >}{\|u\|^2} u.$$
3. Vrai ou Faux ? +0.5 pour une bonne réponse, -0.5 pour une mauvaise réponse. Ne pas justifier les réponses.
   (a) Si deux vecteurs sont orthogonaux, ils sont linéairement indépendants.
   (b) Une projection est une application linéaire inversible.
   (c) L'application $f(u) = 2u$ est une transformation orthogonale.
   (d) Les espaces propres d'une application linéaire f sont orthogonaux deux à deux.

Exercice 2 (4 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -\frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = -2e_2, \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée can. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, -2, 1)$ dans la base canonique et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs

$$u_1 = e_1 + 2e_2, \quad u_2 = e_1 + e_3, \quad u_3 = 2e_2 + e_3.$$

1. Donner $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)$ la matrice de f dans la base canonique.
2. (a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelles sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$?
   (c) Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$?
3. (a) Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f. Donner les valeurs propres associées.
   (b) Déduire de la question précédente $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire la nature géométrique de l'application f.

Exercice 3 (4 points)
On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de A.
2. Diagonaliser A

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4 (5 points)
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1, 1)$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan $F = \mathsf{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Compléter la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ orthogonale de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathsf{Vect}(u_1, u_2) = \mathsf{Vect}(v_1, v_2)$.
3. Quelle est la matrice de s par rapport à la base $\mathcal{B}$ (notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s)$) ?
4. Calculer la matrice de s par rapport à la base canonique (notée $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(s)$).
5. Soit v le vecteur de coordonnées $(-1, 5, 2)$ dans la base canonique. Donner les coordonnées (dans la base canonique) du vecteur $s(v)$

Exercice 5 (2 points)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note A la matrice de f par rapport à la base canonique :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0, b \neq 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) l'application f est-elle une transformation orthogonale ?
2. Calculer les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.
3. Donner les espaces propres de A.
4. On suppose dans cette question que $a = b = 1$. Caractériser géométriquement f.

Correction

Exercice 1

1. (a) f est injective si
$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'),$$
ou encore
$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

   (b) Supposons f injective. On sait que $f(0) = 0$ (car f est une application linéaire) donc $0 \in \ker(f)$. Soit $u \neq 0$, f étant injective $f(u) \neq f(0) = 0$, aucun autre élément de E ne peut avoir pour image 0, donc $\ker(f) = \{0\}$.

   Réciproquement, soit u et v deux vecteurs de E ayant la même image ($f(u) = f(v)$), on a alors :
$$f(u-v) = 0 \Longleftrightarrow (u-v) \in \ker(f) \Longleftrightarrow u = v.$$

2. Soit u et v deux vecteurs non nuls de E. La projection orthogonale de v sur u est de la forme λu, il faut trouver λ. On a par construction $< u, v - \lambda u >= 0$. Il vient
$$< u, v > -\lambda < u, u >= 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{< u, v >}{< u, u >} = \frac{< u, v >}{||u||^2}.$$

3. V-F-F-F

Exercice 2

1. La matrice de f par rapport à la base canonique est :
$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit P la mtrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$:
$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
$\det P = -4 \neq 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont :
$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Les coordonnées de $f(u)$ dans can sont :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ sont :
$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Il suffit de calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$:

$$f(u_1) = u_1, \quad f(u_2) = u_2, \quad f(u_3) = -u_3.$$

u_1, u_2 et u_3 sont trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres $1, 1, -1$.

(b) On déduit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) On déduit que f est la symétrie par rapport au plan $F = \mathsf{Vect}(u_1, u_2)$ parrallèlement à la droite vectorielle $\mathsf{Vect}(u_3)$.

Exercice 3

1. Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. On trouve les espaces propres : $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + 2e_2)$ et $E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2)$.
2. On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Grâce à la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, on obtient $V_{n+1} = AV_n$ et on déduit $V_n = A^n V_0$. On calcule A^n :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$u_n = 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}.$$

Exercice 4

1. On complète la famille (u_1, u_2) par un vecteur de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendant de u_1 et u_2, prenons par exemple $e_3 = (0, 0, 1)'$.
2. On trouve $\mathcal{B}$ par Gram-Schmidt :

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 = (-1, 1, 1)' - \frac{1}{3}(1, 1, 1)' = \frac{1}{3}(-4, 2, 2)' \simeq (-2, 1, 1)',$$

$$v_3 = u_3 - \frac{< u_3, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 - \frac{< u_3, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2 = (0, 0, 1)' - \frac{1}{3}(1, 1, 1)' - \frac{1}{6}(-2, 1, 1)' = \frac{1}{2}(0, -1, 1).$$

On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1)', v_2 = (-2, 1, 1)', v_3 = (0, -1, 1).$$

3. La matrice de s par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit
$$P = M_{B,\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
On a alors
$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(s) = PM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Il suffit donc de calculer
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. f est une matrice orthogonale si et seulement si $|a| = |b| = 1$.
2. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = ab$ et $\lambda_2 = -ab$. Comme a et b sont différents de 0, les deux valeurs propres sont distinctes et A est donc diagonalisable.
3. On trouve comme espace propre :
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(1, b/a), \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(1, -b/a).$$
4. f est la symétrie orthogonale par rapport à E_{λ_1}, c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$.

UFR Sciences Sociales - Département MASS
Année Universitaire 2008-2009

1ère Session : Mai 2009
- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : E5A4F22
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☒ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Laurent Rouvière
- **Documents autorisés** : aucun.

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (Questions de cours, 5 points)

1. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Scwhartz.
2. Enoncer l'inégalité triangulaire.
3. Démontrer l'inégalité triangulaire (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Scwhartz).
4. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère p la projection orthogonale sur l'axe des abcisses. Déterminer $\ker(p)$.
5. Soit $f : E \to E$ une application linéaire où E est un espace euclidien. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f conserve les normes ($\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$) ;
   (b) f conserve le produit scalaire ($\forall (u,v) \in E^2, < f(u), f(v) >=< u, v >$) ;

   On rappelle qu'une application qui vérifie ces conditions est appelée application orthogonale.

   (c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que f est une application orthogonale si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2 (4 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = 5e_1 \\ f(e_2) = 8e_1 + e_2 - 6e_3 \\ f(e_3) = 8e_1 - 4e_2 - e_1, \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée can. Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, -2, 1)$ dans la base canonique et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs

$$u_1 = -4e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad u_2 = e_1, \quad u_3 = e_2 - e_3.$$

1. Donner les matrices suivantes :

$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f), \quad P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}), \quad P^{-1} = M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) \quad \text{et} \quad C = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathsf{id})$$

   où $\mathsf{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Quelles sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$?
   (b) Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$?
3. (a) Montrer que u_1, u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f. Donner les valeurs propres associées.
   (b) Déduire de la question précédente $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire la nature géométrique de l'application f.

Exercice 3 (4 points)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2, $\ker(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$. Caractériser géométriquement l'application f.
4. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
5. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
6. Calculer B^2 et caractériser géométriquement l'application g.

Exercice 4 (5 points)
Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{can} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déduire de la question précédente l'espace vectoriel sur lequel p projette ainsi que l'espace vectoriel parallèlement auquel p projette.
4. On désigne par h l'homothétie de rapport 3

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\to 3u \end{aligned}$$

   Donner $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h)$ la matrice de h par rapport à la base $\mathcal{B}$.
5. Soit φ l'application composée $\varphi = h \circ p$. Donner les matrices :

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\varphi) \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi).$$

6. A-t-on $h \circ p = p \circ h$. Justifier.

Exercice 5 (5 points)
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathsf{can} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit deux vecteurs $u_1 = e_1+e_2+e_3$ et $u_2 = 2e_1 - e_2$. On considère s la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P} = \mathsf{Vect}(u_1, u_2)$.

1. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, donner une base $\mathcal{B}$ telle que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la matrice $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(s)$ et l'image du vecteur $v = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$ par s (les calculs peuvent être un peu "difficiles"...).
3. Quel est le vecteur de $\mathcal{P}$ le plus proche (au sens de la distance euclidienne) du vecteur v.

Correction

Exercice 1

Exercice 2

1. On a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) $u_{\mathcal{B}} = P^{-1}u_{\mathsf{can}} = 1/5(-e_1 + e_2 - 8e_3)$.

   (b) $f(u)_{\mathsf{can}} = Au_{\mathsf{can}} = -3e_1 - 6e_2 + 11e_3$, on déduit $f(u)_{\mathcal{B}} = P^{-1}f(u)_{\mathsf{can}} = e_1 + e_2 - 8e_3$.

3. On a

$$\begin{cases} f(u_1) = 20e_1 - 10e_2 - 15e_3 = -5u_1 \\ f(u_2) = 5e_1 = 5u_1 \\ f(u_3) = 5e_2 - 5e_3 = 5u_3 \end{cases}.$$

4. On déduit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. f est la composée d'une symétrie et d'une homothétie.

Exercice 3

1. $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple, $\lambda_2 = 0$ est valeur propre double. Les sous-espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3) = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3), \quad E_{\lambda_2} = \ker(A) = \mathsf{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3).$$

2. On choisit comme matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

   on a donc

$$A = PDP' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

3. $A^2 = A$, A est donc la projection sur $\mathsf{Im}(A) = \mathsf{Inv}(A) = \ker(A - I_3)$ parallèlement à $\ker(A)$.

4. $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple, $\lambda_2 = -1$ est valeur propre double. Les sous-espaces propres sont les mêmes qu'à la question 1).

5. Il suffit de prendre $\Delta = 2D - I_3$ et $Q = P$ puisque

$$B = 2A - I_3 = 2PDP^{-1} - I_3 = P(2D)P^{-1} - PI_3P^{-1} = P(2D - I_3)P^{-1}.$$

6. $B^2 = I_3$. g est donc la symétrie par rapport à $E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3)$ parallèlement à $E_{\lambda_2} = \ker(A)$.

Exercice 4

1. $A^2 = A$.
2. On peut calculer les espaces propores, mais il est plus simple de passer par le noyau et l'image :
$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad u_3 = e_1 + e_3.$$
3. On projette sur la droite vectorielle $\mathsf{Vect}(u_1)$ parallèlement au plan $\mathsf{Vect}(u_2, u_3)$.
4. Il est facile de voir que
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
5. On déduit
$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Oui, il suffit de vérifier que le produit des matrices associées aux applications comutent.

Exercice 5

1. On complète (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ en posant $u_3 = e_1$. A l'aide de G-S, on obtient
$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = 5e_1 - 4e_2 - e_3, \quad f_3 = 3e_1 + 6e_2 - 9e_3.$$
2. Soit
$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$
On a alors
$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(s) = PM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s)P^{-1} = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 42 & 84 & -36 \\ 72 & -36 & 54 \\ -8 & 14 & 84 \end{pmatrix}.$$
D'où $s(v) = \frac{1}{90}(84e_1 + 414e_2 + 614e_3)$.
3. La solution est la projeté orthogonal de v sur $\mathcal{P}$. On a
$$p(v) = 1/2(v + s(v)) = \frac{1}{90}(132e_1 + 342e_2 + 622e_3).$$

UFR Sciences Sociales - Département MASS
Année Universitaire 2009-2010

1ère Session : Avril 2010

- **Année d'étude** : Licence 2 MASS
- **Code apogée de l'épreuve** : E5A4F22
- **Type d'Enseignement** : UEF
- **Enseignement (intitulé exact)** : Algèbre
- **Durée de l'épreuve** : 2 heures
- **Etudiants** : - Assidus ☒ Dispensés ☒ - Rennes ☒ St Brieuc ☐
- **Rédacteur du sujet** : Laurent Rouvière
- **Documents autorisés** : aucun.

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (Questions de cours, 5 points)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire (noté $<.,.>$).
   (a) Rappeler la définition d'une famille libre.
   (b) Rappeler la définition d'une famille orthogonale.
   (c) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille orthogonale de E. Montrer que cette famille est libre.
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathsf{can}=(e_1,e_2)$. Soit p la projection orthogonale sur $\mathsf{Vect}(e_1+e_2)$. Déterminer $\ker(p)$ et $\mathsf{Im}(p)$.
3. Soit $f:E\to E$ une application linéaire où E est un espace euclidien de dimension n.
   (a) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   — f conserve les normes $(\forall u\in E, \|f(u)\|=\|u\|)$;
   — f conserve le produit scalaire $(\forall (u,v)\in E^2, <f(u),f(v)>=<u,v>)$;
   On rappelle qu'une application qui vérifie ces conditions est appelée application orthogonale.
   (b) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que f est une application orthogonale si et seulement si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2 (4 points)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathsf{can}=(e_1,e_2)$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$A=M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}.$$

1. Soit $u=3e_1+e_2$. Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique.
2. Soit $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ la base formée par les vecteurs $v_1=e_1$ et $v_2=e_1-2e_2$. Calculer $C=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
3. Quelle sont les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$.

4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner sa forme diagonale D, la matrice de passage P correspondante ainsi que la relation entre A, P et D.
5. Sans calcul, déduire de la question précédente les valeurs propres de C (justifier votre réponse).
6. Quelle est la nature géométrique de f. Faire un dessin.

Exercice 3 (3 points)
On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres et les espaces propres de A.
2. Diagonaliser A.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

   Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 4 (4 points)
On se place de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathsf{can} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(u_1, u_2, u_3)'$ et $(v_1, v_2, v_3)'$ dans la base canonique. On considère φ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto 3u_1v_1 + 5u_2v_2 + 6u_3v_3 - 3u_1v_2 - 3u_2v_1 + 3u_1v_3 + 3u_3v_1 - 5u_2v_3 - 5u_3v_2 \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Quelle est la matrice de φ par rapport à la base canonique (on la notera M_1).
3. Soit $w = e_1 - e_2 + 2e_3$ et $z = e_1 - e_3$. Calculer $\varphi(w, z)$.
4. Donner une base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale ainsi que la matrice de φ par rapport à cette nouvelle base (notée M_2).
5. Donner la relation entre les matrices M_1 et M_2.

Exercice 5 (4 points)
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathsf{can} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = 2e_2 - e_3$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On considère p la projection orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P} = \mathsf{Vect}(u_1, u_2)$.

1. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, donner une base $\mathcal{B}$ telle que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la matrice $M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p)$ (les calculs peuvent être "difficiles").
3. Soit $v = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$. Quel est le vecteur de $\mathcal{P}$ le plus proche (au sens de la distance euclidienne) du vecteur v.
4. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. Calculer $s(v)$.

Correction

Exercice 1
Voir cours

Exercice 2

1. On a $f(u) = \frac{1}{5}(-13e_1 - 9e_2)$.
2. On a $C = P^{-1}AP$ avec
$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
D'où
$$C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
3. Les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ sont données par
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -35 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
4. A admet 2 valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. On trouve
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 - 2e_2) \quad \text{et} \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(2e_1 + e_2).$$
D'où $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Les valeurs propres de f sont invariantes par changement de base, les valeurs propres de C sont donc les mêmes que celles de A.
6. f est la symétrie par rapport à E_{λ_1} parallèlement à E_{λ_2}.

Exercice 3

1. A admet 2 valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$. On trouve
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + 3e_2) \quad \text{et} \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2).$$
2. D'où $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. On a
$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AV_n.$$
Par conséquent $V_n = A^nV_0$. Or $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où
$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n + 3(-1)^n & 3^n + (-1)^{n+1} \\ 3^{n+1} + 3(-1)^{n+1} & 3^{n+1} + (-1)^{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^{n+1} \\ 3^{n+1} + (-1)^{n+2} \end{pmatrix}.$$
Ainsi $u_n = \frac{1}{4}(3^n + (-1)^{n+1})$.

Exercice 4

1. On utilise la méthode de Gauss. Pour $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, on a

$$q(u) = 3(x - y + z)^2 + 2(y - z)^2 + z^2.$$

   On conclut que φ est un produit scalaire.

2. On a

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. On trouve $\varphi(w, z) = -8$.

4. On pose

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ la base formée par les colonnes de l'inverse de la matrice P :

$$\begin{cases} f_1 & = e_1 \\ f_2 & = e_1 + e_2 \\ f_3 & = e_2 + e_3 \end{cases}.$$

   On a alors

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Il suffit d'écrire la formule de changement de base pour un produit scalaire $M_1 = P^t M_2 P$..

Exercice 5

1. On complète (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ en posant $u_3 = e_3$. A l'aide de G-S, on obtient

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + 5e_2 - 4e_3, \quad f_3 = -9e_1 + 3e_2 + 6e_3.$$

2. Soit

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

   On a alors

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p) = P M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) P^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 45 & 27 & 54 \\ 27 & 117 & -18 \\ 54 & -18 & 90 \end{pmatrix}.$$

3. La solution est la projeté orthogonal de v sur $\mathcal{P}$: $\frac{1}{126}(549e_1 + 279e_2 + 684e_3)$.

4. On a

$$s(v) = 2p(v) - v = \frac{1}{126}(846e_1 + 180e_2 + 486e_3).$$