TD 0 : Matrices

Exercice 4

1. $||x|| = \sum_{-=1}^{4} x_i$, donc, $||u|| = 28, ||v|| = 70, ||w|| = 5$.
2. $< u, v >= \sum_{i=1}^{4} u_i v_i = 0, < u, w >= -3, < u, w >= 0$.
3. $u'v = 0$,
$$uv' = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 & -35 \\ -1 & -2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$
Pour pouvoir calculer le produit matriciel AB, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B donc uv est impossible.
4. $u'w = -3, w'u = -3$, uw est impossible.
5. $v'w = 0$ et
$$vw' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -14 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

1. $X'X$ est de dimension $p \times p$.
2. On note x_{ij} l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de X $(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p)$. On note également y_{st} l'élément de la $s^{\text{ème}}$ ligne et la $t^{\text{ème}}$ colonne de X $(s = 1, \dots, p, t = 1, \dots, p)$. On a alors :
$$y_{st} = \sum_{k=1}^{n} x_{ks} x_{kt}.$$
3. Il découle de la formule précédente que $X'X$ est symétrique.
4. $X'_{(i)} X_{(i)}$ est de dimension $p \times p$.
5. x_i est de dimension $p \times 1$.
6. Soit z_{st} l'élément de la $s^{\text{ème}}$ ligne et la $t^{\text{ème}}$ colonne de $X'_{(i)} X_{(i)} + x_i x_i'$ $(s = 1, \dots, p, t = 1, \dots, p)$. Montrons que $z_{st} = y_{st}$. On a :
$$z_{st} = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} x_{ks} x_{kt} + x_{is} x_{it} = \sum_{k=1}^{n} x_{ks} x_{kt} = y_{st}.$$

Exercice 8

Comme l'inverse d'une matrice symétrique est une matrice symétrique, on obtient :

$$X'X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9.3 & 5.4 \\ 0 & 5.4 & 12.7 \end{pmatrix}.$$

Comme X ne possède que des 1 sur sa première colonne, on déduit que X possède 25 lignes.

Le coefficient de corrélation linéaire empirique est donné par

$$\begin{aligned}\rho =& \frac{\sum(X_2-\bar{X}_2)(X_3-\bar{X}_3)}{\sqrt{\sum(X_2-\bar{X}_2)^2(X_3-\bar{X}_3)^2}} = \frac{n\sum X_2X_3 - \sum X_2 \sum X_3}{\sqrt{(n(\sum X_2^2)-(\sum X_2)^2)(n(\sum X_3^2)-(\sum X_3)^2)}} \\ =& \frac{25*5.4-0*0}{\sqrt{(25*9.3-0)(25*12.7-0)}} = 0.496\end{aligned}$$

Exercice 9
On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -2 & +5 \end{pmatrix},$$

Par conséquent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -2 & +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 10
Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Matrice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
det	-26	18	$4+2i$	1	1	$2abc$	-16	$(ad-bc)^2$	720.

Exercice 11

1. $C_1 = 10C_2 + C_3$ les vecteurs colonnes sont liés donc le déterminant est nul.
2. On a
$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -20 & -21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -17 \end{vmatrix} = 17*16$$
3. Le déterminant est de la forme :
$$\begin{vmatrix} a & a+100 \\ b & b+100 \end{vmatrix} = 100(a-b).$$

Exercice 12
On trouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

$$\beta(X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.55 \\ -0.57 \\ 1.88 \end{pmatrix}$$

Exercice 14
On remarque d'abord que $u'M^{-1}v$ est un scalaire, donc comme M est symétrique on a $u'M^{-1}v = v'M^{-1}u$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}(M+uv')\left(M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1+u'M^{-1}v}\right) &= I + uv'M^{-1} - \frac{uv'M^{-1} + uv'M^{-1}v'M^{-1}}{1+u'M^{-1}v} \\ &= I + uv'M^{-1} - \frac{uv'M^{-1}(1+v'M^{-1}u)}{1+u'M^{-1}v} = I.\end{aligned}$$

Exercice 15

$$\det(D\Delta) = \begin{vmatrix} ax+by & -ay+bx \\ -bx+ay & ax+by \end{vmatrix} = (ax+by)^2 + (bx-ay)^2$$

$$= \det(D)\det(\Delta) = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

Exercice 16
Les matrices A et D ne sont pas inversibles.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2.5 & 3 & 0 \\ -1.5 & -2 & 0 \\ -1.5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -5/3 & -1/3 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{134}\begin{pmatrix} 36 & 206 & 2 \\ -13 & -93 & 3 \\ -13 & -32 & 14 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

H est inversible si et seulement si $abc \neq 0$. Dans ce cas :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -2/ab & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ -3/ac & (6-2a)/(abc) & 1/c \end{pmatrix}$$

Exercice 17
1. rang 2.
2. On trouve $\det(B) = 4a^2(2a-2)$.
   - Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ le rang vaut 3.
   - Si $a = 0$ ou $a = 1$ la matrice est de rang 2.
3. rang 3.
4. rang 3.

5. On trouve $\det(E) = a^3 + b^3$.
   – Si $a = -b$ et $a \neq 0$ alors $\det(E) = 0$ et la sous-matrice d'ordre 2 en haut à gauche possède un déterminant égal à $a^2 \neq 0$ donc le rang vaut 2.
   – Si $a = b = 0$, la matrice est nulle (rang 0).
   – Si $a \neq -b$ le rang vaut 3.

Exercice 18
???????????

Exercice 19
On trouve $\det(A) = -(m+5)(m+1)$.
– Si $m = 5$ ou $m = -1$ le rang de A vaut 2.
– Si

$$m \neq 5$$

et $m \neq -1$ le rang vaut 3. A est alors inversible et les 5 coefficients demandés sont trouvés dans la matrice inverse qui est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m-5} & \dfrac{1}{m-5} & -\dfrac{1}{m-5} \\ \dfrac{m-2}{m-5} & \dfrac{5m-7}{(m-5)(m+1)} & -\dfrac{7m-17}{(m-5)(m+1)} \\ \dfrac{1}{m-5} & \dfrac{6}{(m-5)(m+1)} & \dfrac{m-11}{(m-5)(m+1)} \end{pmatrix}.$$

TD 1 : Bases et applications

Exercice 1

- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\}$. Soit $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ deux éléments de A_1 et λ, μ deux réels. $\lambda u + \mu v = 0$ donc $\lambda u + \mu \in A_1$ donc A_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On remarque que $A_1 = \{(x, -2/3x) | x \in \mathbb{R}$, donc $A_1 = \mathsf{Vect}(1, -2/3)$.
- Soit $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2)$ deux éléments de A_2. Soit $w = 1u+1v$, w a pour coordonnées (x_1+x_2, y_1+y_2) et $2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) = 2 \neq 1$ donc $w = u+v \notin A_2$ donc A_2 n'est pas stable par combinaison linéaire, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
- Comme
$$A_3 = \{a(1,1)+b(1,-1) | a,b \in \mathbb{R}\} = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\} = \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right).$$
Donc A_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 (et donc $A_3 = \mathbb{R}^2$).

Exercice 2

- F_1 est non vide, il contient par exemple la fonction $x \mapsto 0$. Soit f et g deux fonctions de F_1 :
$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$
donc $(\lambda f + \mu g) \in F_1$ et F_1 est ainsi un sous-espace vectoriel de $Fonct(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- On montre de même que F_2, F_3 et F_5 sont des sous-espaces vectories de $Fonct(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Soit f et g deux éléments de F_4, $1f+1g = 2 \Longrightarrow 1f+1g \notin F_4$ donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $Fonct(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1,\dots,u_4)$ une famille libre de E.

1. Que savez-vous sur la dimension de E ? $\dim(\mathsf{Vect}(u_1,\dots,u_4) = 4$, comme $\mathsf{Vect}(u_1,\dots,u_4)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\dim E \geq 4$.
2. Les familles suivantes sont-elles libres :
   - $(u_1,u_2,0,u_4)$: non, car $0u_1+0u_2+1u_3+0u_4 = 0$.
   - (u_1,u_2,u_3+u_4,u_4) : oui, car $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = 0$ implique $\alpha_i = 0$ pour tout i.
   - (u_1,u_2,u_3) : oui pour la même raison.
   - (u_1,u_2+u_3,u_4) : oui.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1,\dots,u_4)$ une famille génératrice de E.

1. Que savez-vous sur la dimension de E ? Si $(u_1,\dots,u_4)$ n'est pas libre, $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_4) \neq (\lambda'_1,\dots,\lambda'_4)$ tel que :
$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_4 u_4 = \lambda'_1 u_1 + \ldots + \lambda'_4 u_4$$
On peut ainsi exprimer tout vecteur de E en fonction de (u_1,u_2,u_3), donc $\dim E \leq 4$.

2. Les familles suivantes sont-elles génératrices :
   - $(u_1, u_2, u_3, 0, u_4)$: oui.
   - $(u_1, u_2, u_3 + u_4, u_4)$: oui. $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_4 u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3(u_3 + u_4) + (\lambda_4 - \lambda_3)u_4$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer si les familles sont génératrices, libres, liées, forment des bases. Si la famille est une base, calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base.

1. $u_1 = (1, 2, 3)'$, $u_2 = c(4, 0, -1)'$ et $u_3 = (3, 7, 9)'$: $\det[u_1, u_2, u_3] = 13 \neq 0$, donc c'est une base. On a :
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$
Il faut résoudre le système, ce qui revient à inverser la matrice. On trouve : e_1 a pour coordoonées : $(\frac{7}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$. e_2 a pour coordoonées : $(-3, 0, 1)$. e_3 a pour coordoonées : $(\frac{28}{13}, -\frac{1}{13}, -\frac{8}{13})$. Ceci revient à calculer P^{-1}.
2. mêmes vecteurs u_1 et u_2 et $u_3 = (-1, 14, 19)$. $\det P = \det[u_1, u_2, u_3] = 32 \neq 0$, donc c'est une base. On a cette fois :
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 7/16 & -75/32 & 7/4 \\ 1/8 & 11/16 & -1/2 \\ -1/16 & 13/32 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Exercice 6

Soit f une application linéaire, montrer que : $\text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est injective alors pour tout $u \neq v$, $f(u) \neq f(v)$. Or f est une application linéaire donc $f(0) = 0$. Il ne peut donc exister de vecteur u non nul tel que $f(u) = 0$: on a bien $\text{Ker } f = \{0\}$.
- Si $\text{Ker } f = \{0\}$. Supposons que f ne soit pas injective, alors il existe deux vecteurs distincts u et v tels que $f(u) = f(v)$. Mais alors par linéarité de f, on a $f(u - v) = 0$, avec $(u - v) \neq 0$: ceci contredit $\text{Ker } f = \{0\}$.

Exercice 7

Soient a, b, c, d, des scalaires et l'application f :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{array}$$

1. (a) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, si $u = [x, y]' = xe_1 + ye_2$, alors $f(u) = Au$, avec :
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
ce qui revient à dire que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, dont la matrice dans la base canonique est A.
   (b) L'image par f des vecteurs e_1 et e_2 se lit sur les colonnes de la matrice A : $f(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $f(e_2) = be_1 + de_2$.
   (c) Soit $u = xe_1 + ye_2$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors l'image par f de u est donnée dans le texte :
$$f(u) = (ax + by)e_1 + (cx + dy)e_2.$$

2. Soit f_1 l'application linéaire où $a = b = c = d = 1/2$, c'est-à-dire :

$$A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f_1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

   (a)

$$\begin{aligned} \ker(f_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2) \end{aligned}$$

   Pour montrer que $f_1 o f_1 = f_1$, il suffit de vérifier que $A^2 = A$.

   (b) L'application f_1 est donc un projecteur. L'ensemble de ses points invariants est l'ensemble des vecteurs u tels que $(f_1)(u) = u$, ce qui s'écrit encore :

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow x = y$$

   et on obtient le sous-espace vectoriel : $\mathsf{Vect}(e_1 + e_2) = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$.

   (c) Soit M un point de $\mathbb{R}^2$. Puisque f_1 est un projecteur, $f_1(M)$ est le projeté de M sur $\mathsf{Im}(f_1)$ parallèlement à $\ker(f_1)$. Pour un projecteur $\mathsf{Im}(f_1)$ correspond à l'ensemble des points invariants, donc $f_1(M)$ est donc le projeté de M sur la droite $y = x$ parallèlement à la droite $y = -x$.

3. Soit f_2 l'application linéaire où $a = b = c = d = 1$. Avec les mêmes notations qu'avant, on a donc $f_2(u) = 2f_1(u)$. Ainsi f_2 est la composée de la projection orthogonale f_1 et d'une homothétie de rapport 2.

4. Soit f_3 l'application linéaire où $a = d = 0$, $b = 1$ et $c = -1$.

   (a) La matrice de f_3 dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Son déterminant vaut 1 donc f_3 est bijective et $\ker(f_3) = \{0\}$.

   (b) On voit que f_3 est la rotation de centre l'origine et d'angle $-\pi/2$.

5. Soit f_4 l'application linéaire qui s'écrit dans la base canonique :

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

   où $a = 3/4, b = -1/4, c = -3/4$ et $d = 1/4$.

   (a) On trouve $\ker(f_4) = \mathsf{Vect}(e_1 + 3e_2)$, $\mathsf{Im}(f_4) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2)$ et $\mathrm{Inv}(f_4) = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2)$.

   (b) On trouve que $f_4 \circ f_4 = f_4$, *i.e.*, f_4 est un projecteur. Plus précisément, c'est la projection sur la droite vectorielle $\mathsf{Im}(f_4)$ parallèlement à la droite vectorielle $\ker(f_4)$.

   (c) On a $M^2_{c,c}(f_4) = M^3_{c,c}(f_4) = M^n_{c,c}(f_4) = A$. Ceci est vrai pour tout projecteur f et évident géométriquement : une fois qu'on a projeté le vecteur sur $\mathsf{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, réappliquer le projecteur n'a plus aucun effet.

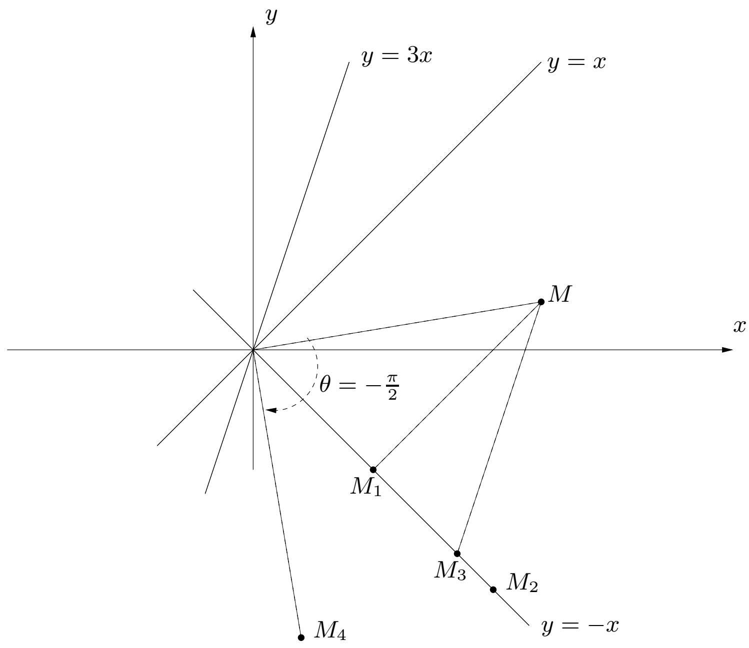

FIG. 1 – Points M_1, M_2, M_3 et M_4.

6. Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) : l'image de M par f_4 est la projection sur la droite d'équation $y = -x$ parallèlement à la droite d'équation $y = 3x$. Les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont représentés figure 1.

Exercice 8
Soit f, une nouvelle application de

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & f(x,y) = \left(\dfrac{3x-y+3}{4}, \dfrac{-3x+y+3}{4}\right) \end{array}$$

L'application f n'est pas linéaire puisque $f(0,0) \neq (0,0)$. Si on note

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix},$$

on a la relation : $f(X) = AX + B$. Par analogie avec la dimension 1, on dit que f est une application affine.

Exercice 9
Soit $\mathbb{R}^2$ l'espace vectoriel muni de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f la rotation de centre O $(0,0)$ et d'angle $\pi/4$ ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire). La matrice A de f dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/4 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

Exercice 10

Soit, dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes de vecteurs suivants :

$$B: \quad \vec{e_1} = (1,1,0) \;\; \vec{e_2} = (1,-2,1) \;\; \vec{e_3} = (0,2,1)$$

$$B': \quad \vec{e_1'} = (3,2,2) \;\; \vec{e_2'} = (0,-3,-1) \;\; \vec{e_3'} = (2,-3,0)$$

1. Il suffit de vérifier que les déterminants des matrices formés par les vacteurs e_1, e_2, e_3 et e_1', e_2', e_3' sont non nuls.
2. Notons
   - P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$;
   - Q la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$;
   - R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   On a
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On a donc $R = P^{-1}Q$, c'est a dire
$$R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/5 & 1 \\ 1 & 1/5 & 1 \\ 1 & -6/5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathsf{can}) \arrow[dr, "P^{-1}"] & \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "R"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :
$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3} \quad f(\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 4\vec{e_3} + 3\vec{e_1} \quad f(\vec{e_3}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_3} + \vec{e_2}.$$
   On connaît donc la matrice de f dans la base B, à savoir :
$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$
   R est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, donc $D = R^{-1}AR$ (D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$). On a donc
$$D = \begin{pmatrix} -32 & 23 & 11 \\ -75 & 50 & 20 \\ 53 & -34.4 & -13 \end{pmatrix}.$$

TD 2 : Diagonalisation

Exercice 1

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$:

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit du diagramme suivant que $C = P^{-1}AP$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^4, \mathsf{can}) \arrow[r, "{f, A}"] & (\mathbb{R}^4, \mathsf{can}) \arrow[d, "{\mathsf{id}, P^{-1}}"] \\
(\mathbb{R}^4, \mathcal{B}) \arrow[u, "{\mathsf{id}, P}"] \arrow[r, "{f, C}"'] & (\mathbb{R}^4, \mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

On calcule P^{-1} pour déduire C :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Il faut exprimer $f(i_0)$ et $f(j_0)$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Graphiquement, on lit :

$$f(i_0) = \cos(2\pi/6)i_0 + \sin(2\pi/6)j_0 = \frac{1}{2}i_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}j_0.$$

$$f(j_0) = \cos(\pi/6)i_0 - \sin(\pi/6)j_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}i_0 - \frac{1}{2}j_0.$$

D'où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$:

$$P = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient grâce au diagramme 2

$$A_0 = PA_1P^{-1}.$$

On peut calculer P^{-1} de deux manières différentes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \arrow[r, "{f, A_1}"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \arrow[d, "{\mathsf{id}, P}"] \\
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_0) \arrow[u, "{\mathsf{id}, P^{-1}}"] \arrow[r, "{f, A_0}"'] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_0)
\end{tikzcd}$$

FIG. 2 – Changement de base pour f.

- On inverse P ;
- P^{-1} est la matrice de rotation d'angle $-\pi/6$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve la matrice A_0 en calculant PA_1P^{-1}.

Exercice 3

1. La matrice A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, A est donc diagonalisable. Pour trouver l'espace propre E_{λ_1} on résout :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3x \\ 4x - y = 3x \end{cases} \Longleftrightarrow x = y.$$

Donc $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{2}(e_1 + e_2))$. De même, on trouve $E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(e_1 + 2e_2) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{5}(e_1 + 2e_2))$. Soit $\mathcal{B}$ la base $(1/\sqrt{2}(e_1 + e_2), 1/\sqrt{5}(e_1 + 2e_2))$. A a pour représentation dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a une seule valeur propre $\lambda = 2$ d'ordre de multiplicité 2. $E_\lambda = \mathsf{Vect}(e_2)$ est de dimension 1, donc B n'est pas diagonalisable.
3. On a 3 valeurs propres : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ donc C est diagonalisable. $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + 3/2e_2 + 1/2e_3) = \mathsf{Vect}(2/\sqrt{14}(e_1 + 3/2e_2 + 1/2e_3)$. De même,
$$E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(3e_1 + 4e_2 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{26}(3e_1 + 4e_2 + e_3))$$
et
$$E_{\lambda_3} = \mathsf{Vect}(1/2e_1 + e_2 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/3e_1 + 2/3e_2 + 2/3e_3).$$
Dans la base formée des vecteurs propres, C a pour matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. On a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$ (λ_2 est d'ordre de multiplicité 2). $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{3}(e_1 + e_2 + e_3))$. On trouve
$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} \\ =& \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ =& \mathsf{Vect}((-e_1 + e_2), (-e_1 + e_3)) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{2}(-e_1 + e_2), 1/\sqrt{2}(-e_1 + e_3)) \end{aligned}$$
(il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que leurs coordonnées vérifient $x+y+z=0$). Le sous espace $\mathbb{E}_{\lambda_2}$ est de dimension 2, D est donc diagonalisable. Elle a pour représentation dans la base formé par les vecteurs propres :
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. On a deux valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 2$ (λ_2 est d'ordre de multiplicité 2). On trouve
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{3}(e_1 - e_2 + e_3))$$
et
$$E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(-e_1 + e_2 + e_3).$$
E_{λ_2} est de dimension 1 donc E n'est pas diagonalisable.
6. Le polynôme caractéristique vaut $P(\lambda) = (\lambda-2)(-\lambda^2+2\lambda-2)$. On a une seule valeur propre réelle 2 d'ordre 1, F n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si on se place dans $\mathbb{C}$, on a trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1+i$ et $\lambda_3 = 1-i$. $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{3}(e_1 + e_2 + e_3)$. Pour les valeurs propres complexes on obtient :
$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} =& \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_2 = iz_1, z_3 = -iz_1\} \\ =& \left\{ z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} : z_1 \in \mathbb{C} \right\} = \mathsf{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} = \mathsf{Vect} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et

$$E_{\lambda_3} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_2 = -iz_1, z_3 = iz_1\} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}.$$

La représentation de F dans la base des vecteurs propres est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

7. 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 5$ d'ordre 1 et $\lambda_2 = -3$ d'ordre 2. $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + 2e_2 - e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{6}(e_1 + 2e_2 - e_3))$ et $E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(-2e_1 + e_2, 3e_1 + e_3) = \mathsf{Vect}(1/\sqrt{5}(-2e_1 + e_2), 1/\sqrt{10}(3e_1 + e_3))$. $\mathbb{E}_{\lambda_2}$ est de dimension 2 donc G est diagonalisable, sa représentation dans la base formée par les vecteurs propres est

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. A possède deux valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$ donc A est digonalisable.

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2), \qquad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(2e_1 - e_2).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base $(f_1, f_2) = (e_1 + e_2, 2e_1 - e_2)$, P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et D la représentation de A dans $\mathcal{B}$:

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $D = P^{-1}AP$ ou encore $A = PDP^{-1}$, par suite

$$A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \ldots \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^{n+1/2} - 2 \\ 4^n - 1 & 4^{n+1/2} + 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a deux racines complexes $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}i$.

$$E_{\lambda_1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = -i\sqrt{2}z_1\} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = i\sqrt{2}z_1\} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{C}^2$ définie par $(z_1, z_2) = (e_1 - i\sqrt{2}e_2, e_1 + i\sqrt{2}e_2)$. Avec les notations de la question précédente, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - i\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{11}\exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \sqrt{11}\exp(-i\theta) \end{pmatrix},$$

avec $\theta = Arg(3+i\sqrt{2}) \simeq 0.4405$. On a donc

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sqrt{11})^n \exp(in\theta) & 0 \\ 0 & (\sqrt{11})^n \exp(-in\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & i/(2\sqrt{2}) \\ 1/2 & -i/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$B^n = (\sqrt{11})^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

3. On a trois valeurs propres réelles : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$ donc C est diagonalisable. On trouve

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 - e_2), \qquad E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3), \qquad E_{\lambda_3} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 - 2e_3).$$

Ici,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} 1/6 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 2(-1)^{n+1} \\ (-1)^n & (-1)^n & 2(-1)^{n+1} \\ 2(-1)^{n+1} & 2(-1)^{n+1} & 4(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1. On lit dans la matrice A :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3. \end{cases}$$

2. $\det(A) = 0$.
3. On trouve trois valeurs propres : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$. Les espaces propres sont : $E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}(e_1 - 3e_2 + e_3)$, $E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}(-e_1 - 4e_2 + 2e_3)$, $E_{\lambda_3} = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.
4. A est une matrice 3×3 et admet trois valeurs propres (réelles) distinctes, elle est donc diagonalisable. Soit $\mathcal{B}'$ la base formée des vecteurs u_1, u_2, u_3 définis par :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - 3e_2 + e_3 \\ u_2 = -e_1 - 4e_2 + 2e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

La forme de la matrice A dans $\mathcal{B}'$ est

$$D = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :
$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. On obtient à l'aide d'un diagramme du style de la Figure 2 : $D = P^{-1}AP$. On vérifie par le calcul que l'on a bien :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/4 & 7/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

1. 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -3$ d'ordre 2.
2. Les sous-espaces propres sont
$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathsf{Vect}(e_1 + 2e_2 - e_3), \qquad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{10}}(3e_1 + e_3)\right)$$
3. Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 - e_3, -2e_1 + e_2, 3e_1 + e_3)$, on a
$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:
$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
alors $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = PM_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}P^{-1}$ et par conséquent $M^n_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = PM^n_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}P^{-1}$:
$$\begin{aligned} M^n_{\mathcal{B},\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n + 7*(-3)^n & 2*5^n - 2*(-3)^n & -3*5^n + 3*(-3)^n \\ 2*5^n - 2*(-3)^n & 4*5^n + 4*(-3)^n & -6*5^n + 6*(-3)^n \\ -5^n + (-3)^n & 2*5^n + 2*(-3)^n & -3*5^n - 3*(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7

La matrice E admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ (d'ordre 2). Les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$, elle est donc triangularisable dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs $u_1 = (e_1 - e_2 + e_3)$ et $u_2 = (-e_1 + e_2 + e_3)$ forment une base des sous espaces-propres. On complète cette base par le vecteur $u_3 = e_1$ (il suffit de vérifier que $\det(u_1, u_2, u_3) \neq 0$. La représentation de E dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire supérieure. Pour déterminer la troisième colonne de cette matrice, il suffit d'exprimer $f(u_3)$ dans la nouvelle base. Comme $f(u_3) = f(e_1) = e_1 + e_2 - 3e_3$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(u_3)$ dans la nouvelle base s'obtiennent par le produit $P^{-1}(1,1,-3)' = (-2,-1,2)'$. La représentation de E dans la nouvelle base est donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

TD 3 : Diagonalisation

Exercice 1 (Système différentiel linéaire)
On s'intéresse au système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= 5x + 16y - 4e^t \\ y' &= -2x - 7y + e^t \end{cases}$$

qu'on écrit sous forme matricielle

$$X' = AX + T$$

1. Valeurs propres : -3 et 1. Vecteurs propres associés : $u = [1, -1/2]'$ et $v = [1, -1/4]'$.
2. On a donc
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
3. On a donc $A = PDP^{-1}$. Ce qui donne pour le système différentiel : $X' = PDP^{-1}X + T$.
4. On peut encore écrire : $P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}T$. Ou encore : $\tilde{X}' = D\tilde{X} + \tilde{T}$.
5. On vérifie que $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}$. On a donc maintenant
$$\tilde{X}' = D\tilde{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}. \tag{1}$$
6. L'équation différentielle $\tilde{x}' = -3\tilde{x}$ admet pour solution générale : $x(t) = \alpha e^{-3t}$.
7. L'équation différentielle $\tilde{y}' = \tilde{y} - 4e^t$ admet pour solution générale : $y(t) = (\beta - 4t)e^t$.
8. On en déduit que
$$X = P\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^{-3t} \\ (\beta - 4t)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{-3t} + (\beta - 4t)e^t \\ -\frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{4}(\beta - 4t)e^t \end{bmatrix}$$

Exercice 2 (Système dynamique linéaire)
On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout $n \geq 0$, le système de relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{cases}$$

On peut écrire ce système sous la forme : $X_{n+1} = AX_n$, en notant $X_n = [u_n, v_n]'$ et :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

On diagonalise A, ce qui donne :

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

On a alors

$$X_1 = AX_0 \Longrightarrow X_2 = AX_1 = A^2A_0 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow X_n = A^nX_0,$$

d'où

$$X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - (-2)^n \\ -2^{n+1} + 3(-2)^n \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 (Projection et symétrie par rapport à un plan)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

1. $\lambda_1 = 1$ est valeur propre double, $\lambda_2 = 0$ valeur propre simple. Les sous-espaces propres sont

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3) = \mathsf{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3), \quad E_{\lambda_2} = \ker(A) = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3).$$

2. Pour la matrice de passage P, on s'arrange pour avoir une base de vecteurs orthonormés :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

de sorte que son inverse est tout simplement sa transposée. Ainsi on a la décomposition :

$$A = PDP' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

3. Puisque $D^2 = D$, on a $A^2 = PD^2P' = PDP' = A$, c'est-à-dire que f est un projecteur. f est la projection orthogonale sur $\mathsf{Im}(A) = \mathsf{Inv}(A) = \ker(A - I_3)$ parallèlement à $\ker(A)$.
4. $\ker(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$ sont représentés Figure 3.
5. La construction de $f(M)$ est donnée sur cette même figure.

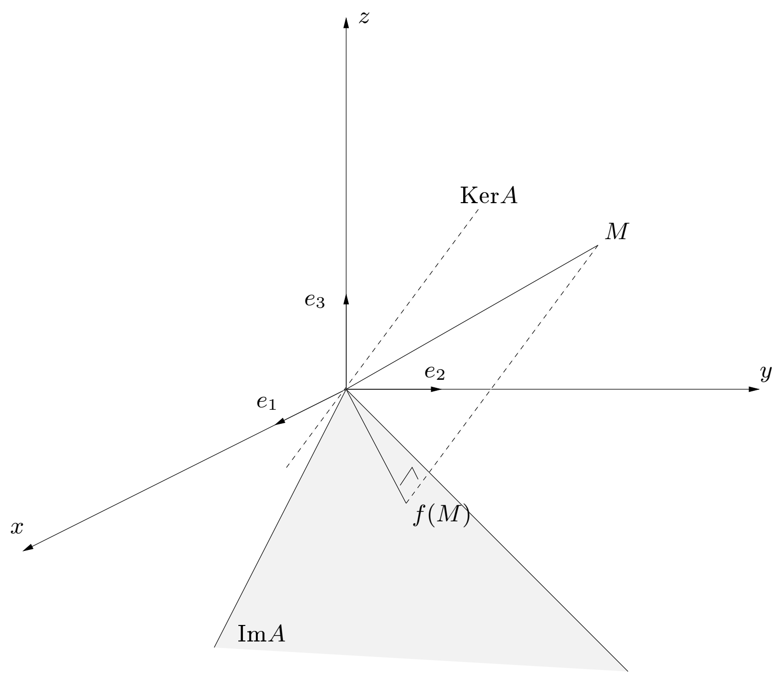

FIG. 3 – Points M et $f(M)$.

6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :
$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$
1 est valeur propre double, -1 valeur propre simple. Les sous-espaces propres sont donnés par :
$$\ker(B + I_3) = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3), \quad \text{et} \quad \ker(B - I_3) = \mathsf{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3).$$
Ainsi B est diagonalisable dans la même base que A.
7. En prenant $\Delta = 2D - I_3$ et $Q = P$, on a donc $B = Q\Delta Q^{-1}$. Ceci pouvait se voir directement, puisque :
$$B = 2A - I_3 = 2PDP' - I_3 = P(2D)P' - PI_3P' = P(2D - I_3)P'.$$
8. On trouve $B^2 = I$, c'est-à-dire que g est la symétrie par rapport à $\ker(B - I_3)$ parallèlement à $\ker(B + I_3)$.
9. L'ensemble des vecteurs v invariants par g est $\mathsf{Inv}(g) = \ker(B - I_3)$ et l'ensemble des vecteurs inversés est $F = \ker(B + I_3)$. Ils sont représentés Figure 4.
10. La construction de $g(M)$ est donnée sur cette même figure.

Exercice 4 (Projection et symétrie par rapport à une droite)

1. $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple, $\lambda = 2 = 0$ est valeur propre double. Les sous-espaces propres sont :
$$E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3) = \mathsf{Vect}(e_1 + e_2 + e_3), \quad E_{\lambda_2} = \ker(A) = \mathsf{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_3).$$

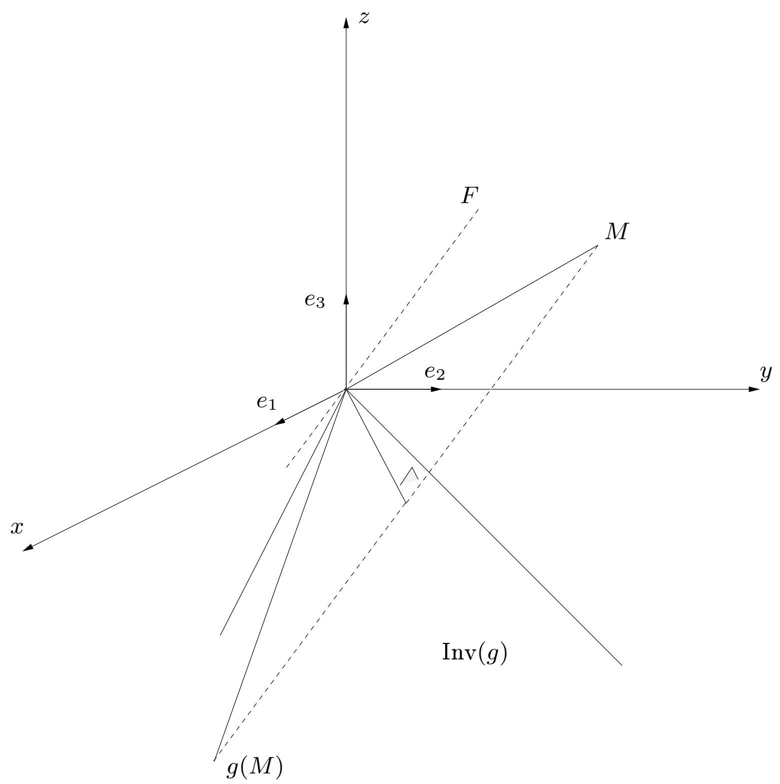

FIG. 4 – Points M et $g(M)$.

2. On choisit comme matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

   on a donc

$$A = PDP' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

3. $A^2 = A$, A est donc la projection sur $\mathsf{Im}(A) = \mathsf{Inv}(A) = \ker(A - I_3)$ parallèlement à $\ker(A)$.
4. à faire
5. à faire
6. $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple, $\lambda_2 = -1$ est valeur propre double. Les sous-espaces propres sont les mêmes qu'à la question 1).
7. Il suffit de prendre $\Delta = 2D - 1$ et $Q = P$ puisque

$$B = 2A - I_3 = 2PDP^{-1} - I_3 = P(2D)P^{-1} - PI_3P^{-1} = P(2D - I_3)P^{-1}.$$

8. $B^2 = I_3$. g est donc la symétrie par rapport à $E_{\lambda_1} = \ker(A - I_3)$ parallèlement à $E_{\lambda_2} = \ker(A)$.

9. L'ensemble des points invariants par g est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + e_3$ (le sous-espace propre E_{λ_1}, l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$ est le sous-espace propre E_{λ_2}.

Exercice 5 (Chaîne de Markov)
Un petit scarabée se déplace sur un triangle, dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, 3\}$. A l'instant n, s'il est au sommet i, il va vers le sommet j avec la probabilité p_{ij}, où il se retrouve à l'instant $(n+1)$. Si $i = j$, il reste sur place. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq 3}$ est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Le spectre de la matrice P est égal à

$$\mathrm{sp}(P) = \{0, \frac{1}{2}, 1\},$$

d'où la matrice diagonale :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Et comme matrice de passage on peut prendre :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors : $P = QDQ^{-1}$.

2. On en déduit que : $P^n = QD^nQ^{-1}$.
3. Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} P^n = Q(\lim_{n\to+\infty} D^n)Q^{-1}$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, quel que soit le sommet d'où le scarabée part, il se retrouve au bout d'un temps assez long au sommet 1 ou au sommet 2, de façon équiprobable. Il n'a aucune chance d'être au sommet 3, car : s'il est parti du sommet 1 ou du sommet 2, il ne peut jamais aller au sommet 3 ; s'il est parti du sommet 3, il va le quitter presque sûrement au bout d'un moment (le temps qu'il faut pour faire apparaître Pile dans une suite de lancers d'une pièce équilibrée) puis tourner entre les sommets 1 et 2. On dit que le sommet 3 est transitoire.

4. Les transitions du scarabée sont maintenant données par la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la même méthode, on obtient cette fois

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Cette fois, quel que soit le sommet d'où le scarabée part, il se retrouve au bout d'un temps assez long en l'un des 3 sommets de façon équiprobable. Ceci n'est pas étonnant puisque, du point de vue des déplacements du scarabée, les trois sommets jouent des rôles symétriques : aucun n'est privilégié par rapport aux autres.

Exercice 6 (Suite de Fibonacci)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Grâce à la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, on trouve : $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, donc $V_0 = [0, 1]'$, $V_1 = [1, 1]'$, $V_2 = [1, 2]'$.
2. On a la relation de récurrence d'ordre 1 : $V_{n+1} = AV_n$, avec
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
3. On en déduit que :
$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = A^n V_0.$$
4. En posant $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$, la diagonalisation de A donne :
$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ -\beta/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$
On a donc : $V_n = A^n V_0 = PD^nP^{-1}V_0$, et comme seule la première coordonnée u_n de V_n nous intéresse, rien n'oblige à faire tout le calcul matriciel. On trouve finalement :
$$\forall n \geq 0 \qquad u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$
Remarques :
   - A moins d'être un deus calculus, il est prudent de vérifier qu'on ne s'est pas viandé quelque part en regardant si la formule générale obtenue marche au moins pour les premiers termes u_0, u_1 et u_2.
   - Puisque $\alpha \approx 1.62 > 1$ tandis que $\beta \approx -0.62 \in]-, 1, 1[$, on en déduit directement un équivalent de u_n :
$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

– α est appelé le nombre d'or, car il n'est pas très éveillé (encore bravo...).

Exercice 7 (Récurrence d'ordre 3)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. La relation de récurrence d'ordre 3 sur la suite scalaire $(u_n)_{n\geq 0}$ se traduit par une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite vectorielle $(V_n)_{n\geq 0}$:

$$V_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} = AV_n.$$

On en déduit que $V_n = A^n V_0$. La diagonalisation de A donne :

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, d'où la formule générale de u_n :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3}.$$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{8}{3}$.

2. Généralisation (récurrence d'ordre p) : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dont on connaît les p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ et obéissant à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

La relation de récurrence d'ordre p sur la suite scalaire $(u_n)_{n\geq 0}$ se traduit par une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite vectorielle $(V_n)_{n\geq 0}$, avec $V_n = [u_n, \dots, u_{n+p-1}]'$ vecteur de taille p. La matrice A de taille $p \times p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf la surdiagonale égale à 1 et la dernière ligne dont les coefficients sont $a_0, \dots, a_{p-1}$ est appelée matrice compagnon. On a alors $V_{n+1} = AV_n$, donc comme d'habitude $V_n = A^n V_0$ et il suffit de diagonaliser (si possible) la matrice A. Un calcul de déterminant en développant par rapport à la dernière ligne de $(A - \lambda I_p)$ montre que le polynôme caractéristique de A est tout simplement :

$$P_A(\lambda) = \lambda^p - (a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0).$$

C'est pourquoi on l'appelle aussi polynôme caractéristique associé à l'équation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

Exercice 8 (Exponentielle de matrice)

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp A$ la matrice de taille $n \times n$ définie par :

$$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

A tout hasard, on rappelle que pour tout réel x, on a : $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. On considère tout d'abord la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. La matrice A se diagonalise sans problème :

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. On a alors

$$\frac{D^n}{n!} = \begin{bmatrix} (-1)^n/n! & 0 \\ 0 & 1/n! \end{bmatrix}.$$

On a alors :

$$\exp D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/n! & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n! \end{bmatrix}.$$

donc on voit que l'exponentielle de la matrice diagonale D est très simple, c'est la matrice diagonale dont les coefficients sont les exponentielles des coefficients de D :

$$\exp D = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^1 \end{bmatrix}.$$

4. On en déduit que

$$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1} = P(\exp D)P^{-1},$$

c'est-à-dire :

$$\exp A = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}1 & \mathrm{sh}1 \\ \mathrm{sh}1 & \mathrm{ch}1 \end{bmatrix}.$$

5. La matrice $-A$ est diagonalisable dans la même base que A, les valeurs propres étant opposées à celles de A. Ainsi

$$-A = P(-D)P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\exp(-A) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}1 & -\mathrm{sh}1 \\ -\mathrm{sh}1 & \mathrm{ch}1 \end{bmatrix}.$$

6. On vérifie que $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$. Ainsi tout se passe comme pour les nombres : $e^{-x} = 1/e^x$.

7. Le raisonnement fait ci-dessus se généralise sans problème : si $A = PDP^{-1}$, on a $\exp A = P(\exp D)P^{-1}$, avec $\exp D$ matrice diagonale, de diagonale $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

8. De même $\exp(-A) = P\exp(-D)P^{-1}$, avec $\exp(-D)$ matrice diagonale :

$$\exp(-D) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{-\lambda_n} \end{bmatrix} = (\exp D)^{-1}.$$

   Donc :

$$\exp A \exp(-A) = P\exp DP^{-1}P\exp(-D)P^{-1} = P\exp D\exp(-D)P^{-1} = PP^{-1} = I_n,$$

   et la matrice $\exp A$ est bien inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

9. Rappelons que la trace d'une matrice est invariante par changement de base, donc si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a clairement :

$$\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

   Mais alors d'après ce qu'on vient de voir, la matrice $\exp A$ est aussi diagonalisable, de valeurs propres $\exp\lambda_1, \dots, \exp\lambda_n$, et comme le déterminant est lui aussi invariant pas changement de base, on a :

$$\det(\exp A) = \exp\lambda_1 \times \cdots \times \exp\lambda_n = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp(\mathrm{Tr}A).$$

10. La matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   n'est pas diagonalisable, car sa seule valeur propre est 0, donc si on avait $A = PDP^{-1}$, D serait nulle, donc $AP0P^{-1}$ aussi, ce qui n'est pas le cas.

11. On a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   et pour tout $n \geq 4$, $A^n = 0$. A est ce qu'on appelle une matrice nilpotente. On déduit de la formule de définition de l'exponentielle d'une matrice :

$$\exp A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A peu de choses près, la diaginalisation de A a été faite dans l'exercice "Projection et symétrie par rapport à une droite". Pour calculer l'exponentielle de A, on peut donc appliquer la technique de diagonalisation.

13. On a $A^2 = 3A$, $A^3 = 3^2A$, et de façon générale $A^n = 3^{n-1}A$ pour tout $n \geq 1$ (récurrence). En appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice, on obtient donc :

$$\exp A = I_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} A = I_3 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \right) \frac{A}{3} = I_3 + \frac{e^3 - 1}{3} A.$$

TD 4 : Produit scalaire

Exercice 1 (Distance euclidienne)

1. Considérons l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_1, x_2)'$ et $(y_1, y_2)'$. La norme euclidienne de x et y est :

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad ||y|| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

et la distance euclidienne entre les vecteurs x et y vaut :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

d'après Pythagore (voir Figure 5).

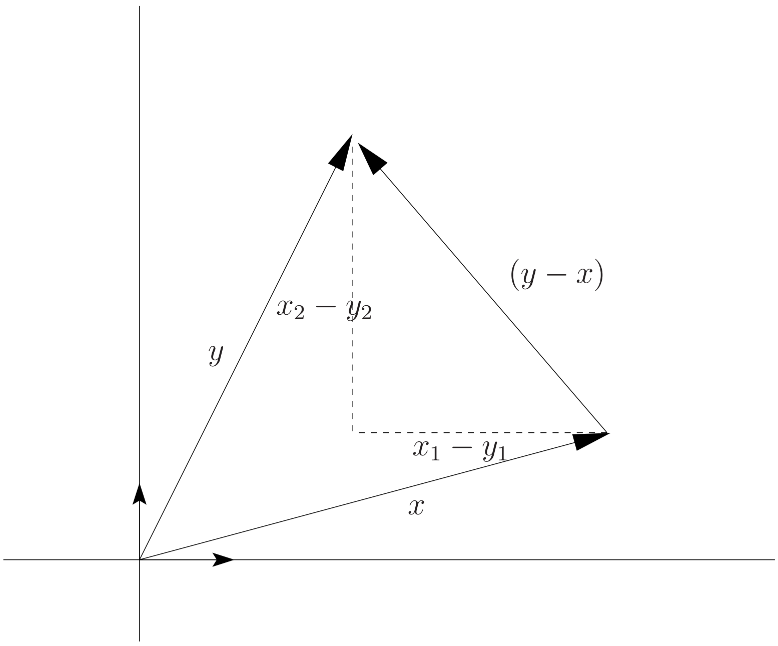

FIG. 5 – Norme dans $\mathbb{R}^2$.

2. Plaçons nous maintenant dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ définie par $e_1' = \ell_1 e_1$, e_2' est de longueur ℓ_2 et l'angle entre e_1' et e_2' vaut α (voir Figure 6).

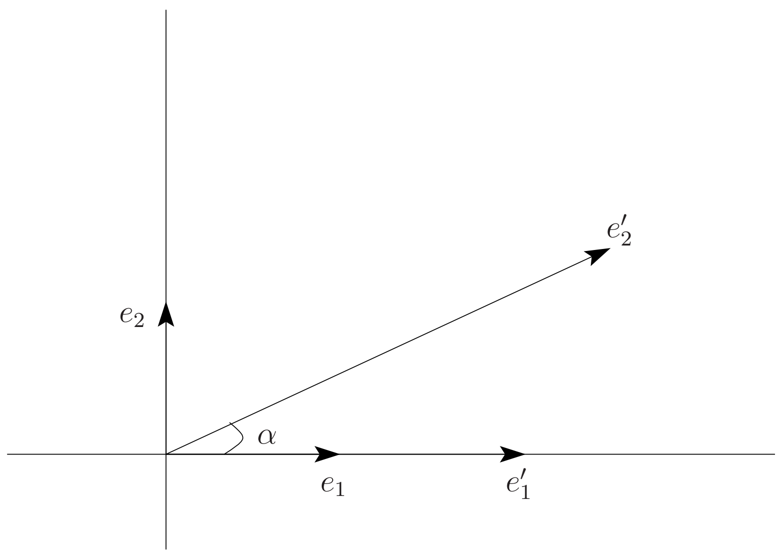

FIG. 6 – Distance euclidienne et changement de base.

La matrice de passage de can à $\mathcal{B}$ est :

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2\cos\alpha \\ 0 & \ell_2 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Si on note (x_1, x_2) et (y_1, y_2) les coordonnées de deux vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$, alors les coordonnées de $x - y$ dans la base canonique sont :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2\cos\alpha \\ 0 & \ell_2 \sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1-y_1)\ell_1 + (x_2-y_2)\ell_2\cos\alpha \\ (x_2-y_2)\ell_2\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

La distance euclidienne entre x et y est donc :

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2\ell_1^2 + (x_2-y_2)^2\ell_2^2 + 2(x_1-y_1)(x_2-y_2)\ell_1\ell_2\cos\alpha}. \tag{2}$$

Exercice 2 (Distances classiques)
On note $\mathcal{D}_2$ l'en semble des points situés à distance 1 de l'origine pour la distance d_2 :

$$\mathcal{D}_2 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = 1\right\}.$$

On a

$$d_2(x,0) = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

$\mathcal{D}_2$ est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

De même

$$\mathcal{D}_1 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, 0) = 1\right\}.$$

Si x_1 et x_2 sont positifs,

$$d_1(x,0) = 1 \iff x_2 = 1 - x_1,$$

on déduit que $\mathcal{D}_1$ est le carré ayant pour sommets les points $(1,0); (0,1); (-1,0); (0,-1)$.

$$\mathcal{D}_\infty = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, 0) = 1\right\}.$$

Si x_1 et x_2 sont positifs,

$$d_\infty(x, 0) = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \text{ et } x_2 \leq 1 \\ x_2 = 1 \text{ et } x_1 \leq 1 \end{cases}.$$

D_∞ est donc le carré ayant pour sommets les points $(1, 1); (1, -1); (-1, -1); (-1, 1)$.

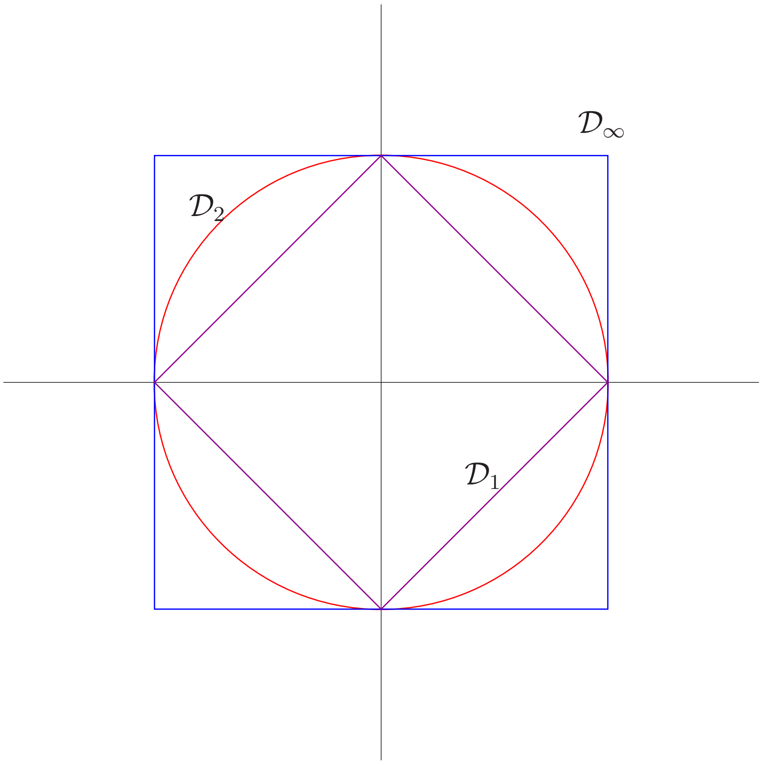

FIG. 7 – Représentation des ensembles de points situés à distance 1 de l'origine pour d_1, d_2 et d_∞.

Exercice 3 (Produit scalaire et orthogonalité)
Soit x et y deux vecteurs tels que $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$. On a :

$$d(x, y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = d(x, O)^2 + d(y, O)^2,$$

d'après Pythagore, x et y sont orthogonaux.

Exercice 4

$$q(u + v) = \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(v, v) + 2\varphi(u, v),$$

d'où le résultat.

Exercice 5

1. **Cauchy-schwarz :** L'inégalité est évidente pour $x = 0$. Supposons $x \neq 0$. Pour tout réel λ on a :
$$0 \leq ||y + \lambda x||^2 =< y + \lambda x, y + \lambda x >= ||y||^2 + 2\lambda < y, x > +\lambda^2||x||^2.$$
Le trinôme en λ est positif ou nul pour toutes les valeurs de λ, il a donc au plus une seule racine réelle. Son discriminant est par conséquent négatif ou nul. Donc
$$4 < y, x >^2 -4||x||^2\,||y||^2 \leq 0,$$

d'où le résultat.

2. **Minkowski :**

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 =&||x||^2 + 2 < x, y > + ||y||^2 \\ &\leq < x, x > + 2| < x, y > | + < y, y > \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| \, ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

3. Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires. Notons y' la projection orthogonale de y sur x. Il suffit de montrer que $y' = y$. On a vu que $y' = \dfrac{< y, x >}{< x, x >} x$, donc :

$$||y - y'||^2 = < y - \frac{< y, x >}{< x, x >} x, y - \frac{< y, x >}{< x, x >} x > = ||y||^2 - \frac{< y, x >^2}{||x||^2} = 0.$$

Par conséquent $y - y' = 0$ et y est colinéaire à x.

Exercice 6 (To be or not to be...)

1. Les applications ϕ sont clairement bilinéaires symétriques. On utilise la méthode de Gauss pour vérifier si elles sont définies positives.
   (a) $q_1(u) = u_1^2 + 3u_2^2 + u_3^2$ est définie positive ;
   (b) $q_2(u) = u_1^2 + 3u_2^2 - u_3^2$ n'est pas définie positive ;
   (c) $q_3(u) = u_1^2 + 2u_2^2 + 4u_3^2$ est définie positive ;
   (d) $q_4(u) = u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2u_1 + u_2^2 + 4u_3^3$. On a

$$q_4(u) = (u_1 + 2u_2)^2 - 4u_2^2 + u_2^2 + 4u_2^2 = (u_1 + 2u_2)^2 - 3u_2^2 + 4u_3^4$$

   donc q_4 n'est pas définie positive ;
   (e) On a

$$\begin{aligned} q_5(u) =& 3u_1^2 + 14u_2^2 + 8u_3^2 + 6u_1u_2 - 3u_1u_3 - 4u_2u_3 + 6u_2u_1 - 3u_3u_1 - 4u_3u_2 \\ =& 3u_1^2 + 14u_2^2 + 8u_3^2 + 12u_1u_2 - 6u_1u_3 - 8u_2u_3 \\ =& 3(u_1^2 + 4u_1u_2 - 2u_1u_3) + 14u_2^2 + 8u_3^2 - 8u_2u_3 \\ =& 3(u_1 + 2u_2 - u_3)^2 - 12u_2^2 - 3u_3^2 + 12u_2u_3 \quad + 14u_2^2 + 8u_3^2 - 8u_2u_3 \\ =& 3(u_1 + 2u_2 - u_3)^2 + 2u_2^2 + 5u_3^2 + 4u_2u_3 \\ =& 3(u_1 + 2u_2 - u_3)^2 + 2(u_2 + u_3)^2 - 2u_3^2 + 5u_3^2 \\ =& 3(u_1 + 2u_2 - u_3)^2 + 2(u_2 + u_3)^2 + 3u_3^2. \end{aligned}$$

   q_5 est donc définie positive.

2. On ne donne les matrice que pour les applications 1, 3 et 5 qui sont des produits scalaires :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les matrices M_1 et M_3 sont diagonales. Pour M_5, on considère $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que les coordonnées $u_{\mathcal{B}} = (u_1', u_2', u_3')$ de u dans $\mathcal{B}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = M_{can,\mathcal{B}}(\mathsf{id}) u_{\mathsf{can}},$$

avec

$$M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a par construction

$$q_5(u) = 3u_1'^2 + 2u_2'^2 + 3u_3'^2.$$

La matrice de ϕ_5 par rapport à $\mathcal{B}$ est donc

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la base $\mathcal{B}$, on inverse $M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}$ est donc formée par mes vecteurs $(e_1, -2e_1 + e_2, 3e_1 - e_2 + e_3)$. On a

$$\tilde{M} = (M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}))' \, M \, (M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}).$$

Exercice 7

Soit u une vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique.

1. ϕ est clairement bilinéaire symétrique. Il faut étudier les valeurs de a pour lesquelles ϕ est définie positive. On obtient par la méthode de Gauss :

$$q(u) = (x - 2y - 3z)^2 + 2(y - 3z)^2 + (a - 27)z^2.$$

$$\phi$$

est un produit scalaire si et seulement si $a > 27$.

2. Il suffit de calculer $\phi(e_i, e_j)$ pour $i, j = 1, 2, 3$. On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Soit u de coordonnées (x, y, z) dans can. On pose

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{r} x - 2y - 3z \\ y - 3z \\ z \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(X, Y, Z) sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ telle que

$$M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a de plus

$$q(u) = X^2 + 2Y^2 + Z^2$$

et donc

$$\phi(u, v) = XX' + 2YY' + ZZ'.$$

(b) Par conséquent,
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique sont les colonnes de la matrice $M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id})$. On note $u_{\mathcal{B}}$ (resp u_{can}) les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ (resp can). On a
$$u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_{\mathsf{can}} = M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) u_{can}.$$

On a donc
$$M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = 2e_1 + e_2 \\ f_3 = 9e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}.$$

On a trouvé une base dans la quelle la matrice du produit scalaire ϕ est diagonale.

(d) On a la relation
$$\tilde{M} = (M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}))' \, M \, M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}).$$

Remarque : La matrice $M_{can,\mathcal{B}}(\mathsf{id})$ étant triangulaire, il est plus simple d'inverser le système
$$\begin{cases} e_1 = f_1 \\ e_2 = -2f_1 + f_2 \\ e_3 = -3f_1 + f_2 + f_3 \end{cases}$$
pour trouver $\mathcal{B}$ (plutôt que de calculer l'inverse de $M_{can,\mathcal{B}}(\mathsf{id})$).

TD 5 : Orthogonalité

Exercice 1

1. On a
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$
donc (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$. On vérifie facilement que $< v_i, v_j >= 0$ pour $i \neq j$, la base est donc orthogonale.

2. Il suffit de vérifier que
$$\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1.$$
On a par exemple pour u_1,
$$\|u_1\| =< \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} >= \frac{1}{\|v_1\|^2} < v_1, v_1 >= \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = 1.$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$,
$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$
On obtient les coordonnées $\tilde{X}_1$ de x_1 dans $\mathcal{B}$ en faisant
$$\tilde{X}_1 = P^{-1}X_1 = P'X_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
De même on trouve
$$\tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{2} \\ -2\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \tilde{X}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 7\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \tilde{X}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}, \tilde{X}_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \tilde{X}_6 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Construisons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de $F = \mathsf{Vect}(f_1, f_2)$. on a d'après Gram-Schmidt
$$e_1 = f_1 \quad \text{et} \quad e_2 = f_2 - \frac{< f_2, e_1 >}{< e_1, e_1 >} f_1.$$

On calcule

$$< f_2, e_1 >= 2, \qquad < e_1, e_1 >= 3,$$

et on obtient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3
On construit (f_1, f_2, f_3) une base de $E = \mathsf{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ à l'aide de Gram-Schmidt. On a $f_1 = e_1$,

$$f_2 = e_2 - \frac{< e_2, f_1 >}{< f_1, f_1 >} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$f_3 = e_3 - \frac{< e_3, f_1 >}{< f_1, f_1 >} f_1 - \frac{< e_3, f_2 >}{< f_2, f_2 >} f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. On a
$$< f(u), v >= (AU)'V = U'(A'V) = U'(AV) =< u, f(v) > .$$

2. Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A et u et v deux vecteurs propres associés à λ et μ. Alors
$$\lambda < u, v >=< \lambda u, v >=< f(u), v >=< u, f(v) >=< u, \mu v >= \mu < u, v > .$$
On déduit $< u, v >= 0$.

Exercice 5
Comme $E = F \oplus F^\perp$, u s'écrit de manière unique $u = u_F + u_{F^\perp}$ avec $u_F \in F$ et $u_{F^\perp} \in F^\perp$. Comme $u \perp F$, $u_F = 0$, de même $u \perp F^\perp$ donc $u_{F^\perp} = 0$ ce qui implique $u = 0$. On déduit

$$F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Exercice 6

$$\|u\|^2 =< u, u >= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_j < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Exercice 7
On construit une base orthonormée de F :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On complète cette base en une base de $\mathbb{R}^3$ ($e_3' = (0,0,1)'$). On construit une base orthogonale $\mathcal{B}$ par Gram-Schmidt

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

On a par construction $F = \mathsf{Vect}(e_1, e_2)$ et $F^\perp = \mathsf{Vect}(e_3)$, d'où en notant p la projection orthogonale sur F

$$D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

On déduit $A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p)$ par un changement de base. On note

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}} = \begin{pmatrix}1&1&-3\\1&4&2\\1&-5&1\end{pmatrix},$$

on a

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p) = PDP^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}5&6&3\\6&10&-2\\3&-2&13\end{pmatrix}.$$

Si on note p' la projection orthogonale sur $F^\perp$, alors

$$G = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p') = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(p') = PGP^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}9&-6&-3\\-6&4&2\\-3&2&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Si on note p la projection orthogonale sur $\mathsf{Vect}(e_1)$, on a

$$D = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, il vient

$$\Pi_1 = PDP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

De même si $p_\perp$ désigne la projection orthogonale sur le complément de $\mathsf{Vect}(e_1)$, alors

$$G = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p_\perp) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_{1^\perp} = PGP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $F = \mathsf{Vect}(e_1)$, comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$, u s'écrit de manière unique $u = u_F + u_{F^\perp}$ avec $u_F \in F$ et $u_{F^\perp} \in F^\perp$. On a

$$\Pi_1 u = u_F, \quad \text{et} \quad \Pi_{1^\perp} u = u_{F^\perp}.$$

Exercice 9

Explicitons les notations de l'énoncé :

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_1^1 \\ \vdots \\ X_1^n \end{pmatrix}, \dots, X_p = \begin{pmatrix} X_p^1 \\ \vdots \\ X_p^n \end{pmatrix} \text{ et } X = (X_1, \dots, X_p) = \begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_p^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1^n & \dots & X_p^n \end{pmatrix}.$$

Soit $p_F(Y)$ la projection de Y sur $F = \mathsf{Vect}(X_1, \dots, X_p)$. Par construction

$$p_F(Y) = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p = X\beta$$

et $Y - p_F(Y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de F donc $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ on a

$$< \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_p X_p, Y - p_F(Y) >= 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} < X_1, Y - p_F(Y) >= 0 \\ \vdots \\ < X_p, Y - p_F(Y) >= 0 \end{cases},.$$

Notons $(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$ les coordonnées de $Y - p_F(Y)$, on peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_n \end{pmatrix} = 0, \dots, \begin{pmatrix} X_p^1 & \dots & X_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_n \end{pmatrix} = 0$$

ou encore matriciellement

$$X'(Y - P_F(Y)) = 0 \Longleftrightarrow X'(Y - X\beta) = 0 \Longleftrightarrow X'Y = X'X\beta \Longleftrightarrow \beta = (X'X)^{-1}X'Y.$$

Comme $P_F(Y) = X\beta$ on déduit que la matrice de projection sur F est $X(X'X)^{-1}X'$.

Exercice 10

$1 \Longleftrightarrow 2$: Soit t un vecteur de F, on a $u - t = u - \pi_F(u) + \pi_F(u) - t$. Par définition $u - \pi_F(u) \in F^\perp$, donc $u - \pi_F(u) \perp \pi_F(u) - t$. En appliquant Pythagore on obtient :

$$\|u - t\|^2 = \|u - \pi_F(u)\|^2 + \|\pi_F(u) - t\|^2,$$

par conséquent $\|u - v\| \leq \|u - t\|$.

$1 \Longleftrightarrow 3$: $v = \pi_F(u)$ si et seulement si $v \in F$ et $u - v \in F^\perp$. On a donc d'après Pythagore

$$\|u - v\|^2 + \|v\|^2 = \|u\|^2.$$

Exercice 11

1. On obtient :

$$< P, Q >= 12, \quad \|P\| = \sqrt{< P, P >} = \sqrt{153}, \quad \|Q\| = \sqrt{< Q, Q >} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} d(P, Q) =& \|P - Q\| = \sqrt{< P - Q - P - Q >} = \sqrt{\|P\|^2 + \|Q^2\| - 2 < P, Q >} \\ =& \sqrt{153 + 2 - 24} = \sqrt{131}. \end{aligned}$$

2. $< .,. >$ est clairement bilinéaire symétrique. On note q la forme quadratique associée :

$$q(P) = P(t_0)^2 + \ldots + P(t_n)^2,$$

q est donc positive. Il reste à montrer qu'elle est définie. Soit P tel que $q(P) = 0$. On a donc $P(t_0) = P(t_1) = \ldots = P(t_n) = 0$. P est de degrès n qui s'annulle en $n + 1$ points distincts, P est donc le polynôme nul.

3. (a) On a maintenant

$$< P, Q >= P(-2)Q(-2) + P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Construisons à l'aide de Gram-Schmidt une base orthogonale $\mathcal{B} = (R_1(X), R_2(X), R_3(X))$ de $\mathcal{P}_2[X]$. On pose $R_1(X) = 1$. Daprès Gram-Schmidt

$$R_2 = P_2 - \frac{< P_2, R_1 >}{\|R_1\|^2} R_1.$$

$$P_2(X) = X, < P_2, R_1 >=< X, 1 >= -2 + -1 + 0 + 1 + 2 = 0,$$

les polynômes 1 et X sont orthogonaux donc $R_2(X) = X$. De même

$$R_3 = P_3 - \frac{< P_3, R_1 >}{\|R_1\|^2} R_1 - \frac{< P_3, R_2 >}{\|R_2\|^2} R_2.$$

On calcule

$$< P_3, R_1 >=< X^2, 1 >= 10, \quad \|R_1\|^2 = 5,$$

de même

$$< P_3, R_2 >=< X^2, X >= 0,$$

d'où $R_3(X) = X^2 - 2$. $\mathcal{B} = (1, X, X^2 - 2)$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_2[X]$.

(b) Les coordonnées de $1, X, X^2$ dans $\mathcal{B}$ sont les colonnes de la matrice :

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La meilleure approximation de $P(X)$ par un élément de $\mathcal{P}_2[X]$ est le polynome $T(X)$ de $\mathcal{P}_2[X]$ qui minimise $D(P, U)$ pour $U \in \mathcal{P}_2[X]$. T est donc le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{P}_2[X]$. A l'aide de Gram-Schmidt, on complète $\mathcal{B}$ en une base orthogonale de $\mathcal{P}_4[X]$. On orthogonalise la base $\{R_1, R_2, R_3, X^3, X^4\}$:

$$R_4 = X^3 - \frac{X^3, 1}{1, 1} 1 - \frac{< X^3, X >}{< X, X >} X - \frac{< X^3, X^2 - 2 >}{< X^2 - 2, X^2 - 2 >}(X^2 - 2) = X^3 - \frac{17}{5} X.$$

De même après calcul, on trouve

$$R^5 = \frac{1}{35}(35X^4 - 155X^2 + 72).$$

On note Π la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_2[X]$ et $\mathcal{B}'$ la base $(R_1, R_2, R_3, 5R_4, 35R_5)$, on a

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit T la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$:

$$T = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 72 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -155 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

On déduit

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\Pi) = PM_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\Pi)P^{-1}$$

et la projection orthogonale de P sur $\mathcal{P}_2[X]$ est

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\Pi) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 422/70 \\ 0 \\ -31/14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{422}{70} - \frac{31}{14}X^2.$$

TD 6 : Transformations orthogonales et matrices symétriques

Exercice 1

1. La matrice de φ par rapport à la base canonique est :

$$M_{\mathsf{can}} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 174.$$

2. (a) Soit u de coordonnées $(x,y)'$ dans la base canonique.

$$q(u) = 9x^2 + 24y^2 + 8xy = 9\left(x + \frac{4}{9}y\right)^2 + \frac{200}{9}y^2.$$

(b) Soit $\mathcal{B}$ la base telle que

$$M_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 4/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la décomposition de Gauss la matrice de φ par rapport à $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 200/9 \end{pmatrix}.$$

(c) Les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

On déduit

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 17 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 200/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 36 \end{pmatrix} = 174.$$

3. (a) M_{can} est une matrice symétrique, elle est donc orthogonalement digonalisable.

(b) Les valeurs propres de M_{can} sont $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = 25$. Les sous-espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{B}'$ la base formée par les vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

la matrice du produit scalaire par rapport à $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$,

$$P = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id})\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

P est une matrice orthogonale donc $P^{-1} = P' = P$ (car P est symétrique). Les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$ sont

$$P\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}12\\14\end{pmatrix}.$$

D'où

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\14\end{pmatrix} = 174.$$

Exercice 2

On note $X_1 = (1,1,1)'$ et $X_2 = (1,2,-1)'$. On a donc $X = (X_1, X_2)$. La projection ortogonale d'un vecteur $u = (u_1,u_2,u_3)'$ s'écrit comme une combinaison linéaire de X_1 et X_2 : $p_F(u) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = X\alpha$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)'$. On a par définition de la projection orthogonale :

$$< X_1, u - p_F(u) >= 0, \quad < X_2, u - p_F(u) >= 0,$$

ce qui se réécrit matriciellement $X'(u - p_F(u)) = 0$, d'où

$$X'(u - X\alpha) = 0 \iff \alpha = (X'X)^{-1}X'u.$$

On a donc $p_F(u) = X\alpha = X(X'X)^{-1}X'u$. La matrice de projection orthogonale sur F est donc :

$$X(X'X)^{-1}X' = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 6 & 10 & -2\\ 3 & -2 & 13\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 25$. Les espaces propres sont

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}.$$

On pose

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$

on a

$$D = P'AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix}100 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}.$$

2. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}$. Les esapaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathsf{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/\sqrt{2}\\-1/2\end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_3} = \begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice formée par les vecteurs propres, on a

$$D = P'BP \text{ avec } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

3. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ (d'ordre 2). Les espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathsf{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

A l'aide de Gram-Schmidt, on orthogonalise la base des vecteurs propres :

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

On pose

$$P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

on a alors

$$D = P'CP \text{ avec } D = \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Le discriminant du polynome caractéristique vaut : $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$, A admet donc deux valeurs propres réelles (éventuellement égales).
2. A est orthogonalement diagonalisable, il existe dont P une matrice orthogonale telle que $A = PDP'$ avec
$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$
On a donc $tr(A) = Tr(D)$ et $\det(A) = \det(D)$ d'où $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.
3. Il suffit de montrer que les valeurs propres sont strictement positives. Comme $\det(A) > 0$, on a $\lambda_1\lambda_2 > 0$ et $ad - b^2 > 0$. On déduit $ad > b^2$ et donc $d \geq 0$. On a donc
$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 > 0 \\ a > 0 \text{ et } d \geq 0 \\ a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases},$$
d'où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Q est donc définie positive.

Exercice 5

V est orthogonalement diagonalisable et les valeurs propres de V sont strictement positives. Soit D la matrice diagonale dont les éléments de la diagonales sont les racines carrées des valeurs propres. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que :

$$V = PD^{1/2}D^{1/2}P' = PD^{1/2}D^{1/2'}P' = SS'$$

avec $S = PD^{1/2}$.

Exercice 6

1. La matrice associée à la forme quadratique Q est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -2$. Les espaces propres sont :

$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_3} = \mathsf{Vect}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice orthogonale formée des vecteurs propres définis ci dessus et

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP'$.

3. Soit $\mathcal{B}$ la base orthonormée formée par les vecteurs colonnes de P. Soit $U_{\mathsf{can}} = (u_1, u_2, u_3)'$ et $U_{\mathcal{B}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{aligned} Q(u) &= U'_{\mathsf{can}} A U_{\mathsf{can}} = U'_{\mathsf{can}} PDP' U_{\mathsf{can}} = (P' U_{\mathsf{can}})' \, D \, P' U_{\mathsf{can}} = (P^{-1} U_{\mathsf{can}})' \, D \, P^{-1} U_{\mathsf{can}} \\ &= U'_{\mathcal{B}} D U_{\mathcal{B}} = 6\tilde{u}_1^2 - 2\tilde{u}_3^2. \end{aligned}$$

Exercice 7

1. Voir exercice 11 du TD 5.
2. La meilleure approximation de P est la projection orthogonale de P sur $\mathcal{P}_2$. Orthogonalisons la base $\mathsf{can} = (1, X, X^2, X^3)$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
   - On pose $R_1(X) = 1$;
   - On calcule R_2 :

$$R_2(X) = X - \frac{< 1, X >}{||1||^2} 1 = X - \frac{1}{2}.$$

   - On calcule R_3 :

$$\begin{aligned} R_3(X) &= X^2 - \frac{< 1, X^2 >}{||1||^2} 1 - \frac{< X - 1/2, X^2 >}{||X - 1/2||^2} (X - \frac{1}{2}) \\ &= X^2 - \frac{3}{2} - (X - \frac{1}{2}) = X^2 - X - 1. \end{aligned}$$

   - On calcule R_4 :

$$\begin{aligned} R_4(X) &= X^3 - \frac{< 1, X^3 >}{||1||^2} 1 - \frac{< X - 1/2, X^3 >}{||X - 1/2||^2} (X - \frac{1}{2}) \\ &\quad - \frac{< X^2 - X - 1, X^3 >}{||X^2 - X - 1||} (X^2 - X - 1) \\ &= X^3 - \frac{8}{2} 1 - \frac{14}{5} (X - \frac{1}{2}) - \frac{6}{4} (X^2 - X - 1) \\ &= X^3 - \frac{3}{2} X^2 - \frac{13}{10} X + \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ est par construction une base orthogonale de $\mathcal{P}_3[X]$ telle que
- (R_1, R_2, R_3) est une base orthogonale de $\mathcal{P}_2[X]$;
- R_4 est une base de $\mathcal{P}_2[X]^\perp$.

Par conséquent si on note π la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_2[X]$, on a :

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en notant P la matrice de passage can à $\mathcal{B}$:

$$T = M_{\mathcal{B},\mathsf{can}}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 9/10 \\ 0 & 1 & -1 & -13/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$B = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\pi) = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/10 \\ 0 & 1 & 0 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les coordonnées de $\pi(P)$ dans base canoique sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/10 \\ 0 & 1 & 0 & 13/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.45 \\ -0.65 \\ -0.75 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La meilleur approximation de P par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$ est donc

$$-0.75X^2 - 0.65X + 5.45.$$

$Q \in \mathcal{P}_2[X]$, par conséquent la projection orthogonale de Q sur $\mathcal{P}_2[X]$ est donc égale à Q.

Exercice 8

Exercice 9

U est une matrice orthogonale, donc $U'U = I$, d'où

$$\det(U'U) = (\det(U)^2) = \det(I) = 1 \Longrightarrow \det(U) = 1 \text{ ou } \det(U) = -1.$$

Exercice 10

Comme $E = F \oplus F^\perp$, on peut construire $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ telle que :
- (e_1, e_2) est une base de F ;
- (e_3, e_4) est une base de $F^\perp$.

La matrice de la projection orthogonale par rapport à $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent 0 et 1 sont valeurs propres d'ordre 2.

Exercice 11

1. A est une matrice symétrique, elle est donc orthogonalement diagonalisable.
2. Si $m=2$, A n'est pas inversible.
3. Les valeurs propres sont :$\lambda_1 = m+4$, $\lambda_2 = m-2$ (d'ordre 2). On trouve comme sous-espace propres
$$E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_1} = \mathsf{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$
4. Si $m=-4$, A est de rang 2, si $m=2$ A est de rang 1, sinon A est de plein rang.
5. On pose
$$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}m+4 & 0 & 0\\0 & m-2 & 0\\0 & 0 & m-2\end{pmatrix},$$
on a alors $A = PDP^{-1}$, d'où $A^{-1} = PDP^{-1}$ avec
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$
On obtient
$$A^{-1} = \frac{1}{3(m+4)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3(m-2)}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 12

1. La symétrie est évidente. La bilinéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale. $< .,. >$ est positive car
$$< P, P >= \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0.$$
Soit P telle que $< P, P >= 0$. Alors
$$\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \Longrightarrow P(t) = 0 \forall t \in [0,1].$$
P est un polynôme de degrés n qui s'annulle en tous points de $[0,1]$, P est donc le polynôme nul.
2. On calcule
$$< P, Q >= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\ ||P||^2 = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\ ||Q||^2 = \int_0^1 1dt = 1,$$
$$d^2(P,Q) = ||P-Q||^2 = \int_0^1 (t-1)^2 = \frac{1}{3}.$$
3. On obtient par Gram-Schmidt la base orthogonale $(R_1(X), R_2(X), R_3(X))$ avec :
$$R_1(X) = 1, \quad R_2(X) = X - \frac{1}{2}, \quad R_3(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

4. Les coordonnées de 1, X et X^2 dans $(R_1(X), R_2(X), R_3(X))$ sont les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. A l'aide de Gram-Schmidt, on complète la base $(R_1(X), R_2(X), R_3(X))$ en une base orthogonale de $\mathcal{P}_3[X]$. On trouve

$$R_4(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}.$$

La meilleure approximation de X^3 par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$ est la projection orthogonale Π de X^3 sur $\mathcal{P}_2[X]$. La matrice de Π par rapport à la base $\mathcal{B} = (R_1(X), R_2(X), R_3(X), R_4(X))$ est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canoniqe à $\mathcal{B}$ est

$$P = M_{B,can}(\mathsf{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 & 1/20 \\ 0 & 1 & -1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La matrice de Π par rapport à la base canonique est donc :

$$M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(\Pi) = PM_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Pi)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $\Pi(X^3)$ dans la base canonique sont donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.05 \\ 0 & 1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.6 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $\Pi(X^3) = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{3}{5}X - \dfrac{1}{20}$.