

**Test**  
**Examen du 07/11/2017**

**Instructions :**

- Le sujet comprend 20 questions. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses.
- Seul le questionnaire à la 5ème page est à rendre. Vous commencerez par colorier les cases correspondant à votre numéro étudiant et renseigner votre nom et prénom.
- Il faut **colorier** les cases correspondants aux bonnes réponses (sur la page 5), mettre une croix dans la case n'est **pas suffisant**.

*Durée : 1 heure 15 minutes.*

**Question 1 ♣** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A L'espérance d'une variable aléatoire réelle est toujours positive ou nulle | <input type="checkbox"/> E Un estimateur est une variable aléatoire                   |
| <input type="checkbox"/> B Un estimateur est un nombre réel   | <input type="checkbox"/> F Le biais d'un estimateur est toujours positif ou nul       |
| <input type="checkbox"/> C Le risque quadratique d'un estimateur est toujours positif ou nul          | <input type="checkbox"/> G La variance d'un estimateur est toujours positive ou nulle |
| <input type="checkbox"/> D Une densité de probabilité prend toujours des valeurs négatives            | <input type="checkbox"/> H <i>Aucune de ces réponses n'est correcte.</i>              |

**Question 2 ♣** Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  inconnu. Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$ . On note  $b(\hat{\theta})$  son biais. Le risque quadratique de  $\hat{\theta}$  vaut (on cochera la (ou les) assertion(s) vraie(s)) :

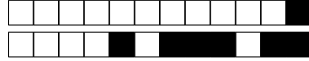
- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$  | <input type="checkbox"/> D $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$ |
| <input type="checkbox"/> B $\mathbf{E}[ \hat{\theta} - \theta ]$    | <input type="checkbox"/> E $b(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$   |
| <input type="checkbox"/> C $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\theta)$ | <input type="checkbox"/> F <i>Aucune de ces réponses n'est correcte.</i>  |

**Question 3 ♣** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A L'espérance de $X$ est un nombre réel                                | <input type="checkbox"/> E $\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$             |
| <input type="checkbox"/> B La fonction de répartition de $X$ vaut $F(x) = \mathbf{P}(x \leq X)$ | <input type="checkbox"/> F $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$                 |
| <input type="checkbox"/> C La fonction de répartition de $X$ vaut $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$    | <input type="checkbox"/> G La fonction de répartition de $X$ vaut $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ |
| <input type="checkbox"/> D $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}  x  f(x) dx$               | <input type="checkbox"/> H <i>Aucune de ces réponses n'est correcte.</i>                        |

**Question 4 ♣** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de loi  $\mathbf{P}_\theta$  et de vraisemblance  $L(x, \theta)$ . L'information de Fisher (si elle existe) associée à  $X$  est définie par :

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A $\mathbf{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right]$                  | <input type="checkbox"/> E $-\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(L(X, \theta)) \right]$              |
| <input type="checkbox"/> B $\mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$ | <input type="checkbox"/> F $-\mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$ |
| <input type="checkbox"/> C $\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(L(X, \theta)) \right]$              | <input type="checkbox"/> G <i>Aucune de ces réponses n'est correcte.</i>   |
| <input type="checkbox"/> D $\mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right]$                  |  |



Pour les 4 questions suivantes, on considère  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r i.i.d. de loi uniforme sur  $] \theta, 10[$  avec  $\theta \in ]0, 10[$ .

**Question 5** La densité de  $X_1$  vaut:

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $f(x) = \frac{1}{10-\theta} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(x)$   | <input type="checkbox"/> C Aucune de ces réponses n'est correcte.                     |
| <input type="checkbox"/> B $f(x) = \frac{1}{\theta-10} \mathbf{1}_{] \theta/2, 10[}(x)$ | <input type="checkbox"/> D $f(x) = (10 - \theta) \mathbf{1}_{] \theta/2, 10[}(x)$     |
|   | <input type="checkbox"/> E $f(x) = \frac{1}{\theta-10} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(x)$ |

**Question 6** L'estimateur des moments de  $\theta$  est donné par

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $10 - 2\bar{X}_n$ | <input type="checkbox"/> E $\max(X_1, \dots, X_n)$                |
| <input type="checkbox"/> B $\bar{X}_n$       | <input type="checkbox"/> F Aucune de ces réponses n'est correcte. |
| <input type="checkbox"/> C $2\bar{X}_n + 10$ | <input type="checkbox"/> G $\min(X_1, \dots, X_n)$                |
| <input type="checkbox"/> D $2\bar{X}_n - 10$ |   |

**Question 7** L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  est donné par

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $\bar{X}_n$             | <input type="checkbox"/> E $2\bar{X}_n + 10$                      |
| <input type="checkbox"/> B $\min(X_1, \dots, X_n)$ | <input type="checkbox"/> F $10 - 2\bar{X}_n$                      |
| <input type="checkbox"/> C $2\bar{X}_n - 10$       | <input type="checkbox"/> G Aucune de ces réponses n'est correcte. |
| <input type="checkbox"/> D $\max(X_1, \dots, X_n)$ |   |

**Question 8** La densité  $f(t)$  de l'estimateur du maximum de vraisemblance est donnée par

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\frac{(10-t)^{n-1}}{(10-\theta)^{n-1}} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(t)$ | <input type="checkbox"/> D $\frac{(10-t)^{n-1}}{(10-\theta)^n} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(t)$ |
| <input type="checkbox"/> B Aucune de ces réponses n'est correcte.                                 | <input type="checkbox"/> E $\frac{(t)^{n-1}}{(\theta-10)^n} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(t)$    |
| <input type="checkbox"/> C $\frac{(t-10)^{n-1}}{(\theta-10)^n} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(t)$     | <input type="checkbox"/> F $\frac{(10-t)^n}{(10-\theta)^n} \mathbf{1}_{] \theta, 10[}(t)$     |

Pour les 4 questions suivantes on considère  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles i.i.d de loi définie par

$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1+\theta}{4}, \quad \mathbf{P}(X_1 = 3) = \frac{2-\theta}{4}$$

**Question 9** L'ensemble des valeurs possibles de  $\theta$  est

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A $\mathbb{R}$                           | <input type="checkbox"/> E $[-1, 3]$ |
| <input type="checkbox"/> B $[-1, 2]$                              | <input type="checkbox"/> F $[-2, 2]$ |
| <input type="checkbox"/> C $[0, 1]$                               | <input type="checkbox"/> G $[-2, 1]$ |
| <input type="checkbox"/> D Aucune de ces réponses n'est correcte. |                                      |



**Question 10** L'espérance de  $X_1$  est donnée par

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A $\frac{1}{4}(2 - 7\theta)$             | <input type="checkbox"/> E $\frac{1}{4}(7 - 2\bar{X}_n)$ |
| <input type="checkbox"/> B Aucune de ces réponses n'est correcte. | <input type="checkbox"/> F 0                             |
| <input type="checkbox"/> C $\frac{1}{4}(7 - 2\theta)$             | <input type="checkbox"/> G $\theta$                      |
| <input type="checkbox"/> D $\bar{X}_n$                            |  |

**Question 11** L'estimateur des moments de  $\theta$  est

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> A Aucune de ces réponses n'est correcte. | <input type="checkbox"/> E $\frac{1}{2}(3 - 2\bar{X}_n)$ |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{\bar{X}_n}{4}$                  | <input type="checkbox"/> F $\frac{1}{2}(7 - 4\bar{X}_n)$ |
| <input type="checkbox"/> C $\bar{X}_n$                            | <input type="checkbox"/> G $\frac{1}{2}(4 - 7\bar{X}_n)$ |
| <input type="checkbox"/> D $\frac{1}{2}(2 - 3\bar{X}_n)$          |  |

**Question 12** La borne de Cramer Rao du modèle considéré est donnée par:

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\frac{(1+\theta)(2+\theta)}{4n}$                  | <input type="checkbox"/> E $\frac{4(1+\theta)(2-\theta)}{n}$      |
| <input type="checkbox"/> B $\frac{(\theta)(2+\theta)}{4n}$                    | <input type="checkbox"/> F $\frac{(1-\theta)(2+\theta)}{4n}$      |
| <input type="checkbox"/> C $\frac{4(1-\theta)(2+\theta)}{n}$                  | <input type="checkbox"/> G $\frac{\theta^2}{n}$                   |
| <input type="checkbox"/> D la borne de Cramer Rao n'existe pas pour ce modèle | <input type="checkbox"/> H Aucune de ces réponses n'est correcte. |
|   | <input type="checkbox"/> I $\frac{\theta}{n}$                     |

**Question 13**  $(X_n)$  converge vers  $X$  en probabilité si

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> A $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 1$ | <input type="checkbox"/> C $\mathbf{P}( X_n - X  \leq \varepsilon) \rightarrow 0$ |
| <input type="checkbox"/> B $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$ | <input type="checkbox"/> D $\mathbf{P}( X_n - X  \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ |

**Question 14 ♣** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X_1$ .    | <input type="checkbox"/> D $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$ . |
| <input type="checkbox"/> B $\bar{X}_n \xrightarrow{L_1} \frac{\mu}{2}$ . | <input type="checkbox"/> E $\bar{X}_n \xrightarrow{L_1} \mu$ .        |
| <input type="checkbox"/> C $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} X_1$ .          | <input type="checkbox"/> F $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu$ .       |
|  | <input type="checkbox"/> G Aucune de ces réponses n'est correcte.     |

**Question 15 ♣** Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> A $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, p(1-p))$        | <input type="checkbox"/> E $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} p + X_1$ .   |
| <input type="checkbox"/> B $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} p$ .  | <input type="checkbox"/> F $2\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 2p$ .   |
| <input type="checkbox"/> C $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{p(1-p)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ | <input type="checkbox"/> G $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ |
| <input type="checkbox"/> D $\frac{1}{3} \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \frac{p}{3}$ .                            | <input type="checkbox"/> H Aucune de ces réponses n'est correcte.   |



**Question 16 ♣** Si  $\hat{\theta}_n$  converge en moyenne quadratique vers  $\theta$ , alors

- A Le biais de  $\hat{\theta}_n$  tend vers  $1 - \theta$                        D Le biais de  $\hat{\theta}_n$  tend vers 0  
 B La variance de  $\hat{\theta}_n$  tend vers  $\theta/2$                        E Le biais de  $\hat{\theta}_n$  tend vers  $\theta$   
 C La variance de  $\hat{\theta}_n$  tend vers 0                       F Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 17**  $(X_n)$  converge vers  $X$  presque sûrement si

- A  $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 1$                        C  $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$   
 B  $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$                        D  $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \rightarrow 0$

**Question 18 ♣** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi et telles que  $\mathbf{E}[X_1^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$  et  $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$ . On a

- A  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$                        D  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$   
 B  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$                        E  $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} X_1$ .  
 C  $(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$                        F  $\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu$ .  
 G Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 19**  $(X_n)$  converge vers  $X$  en moyenne quadratique si

- A  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^2] = 0$ .                       C  $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \rightarrow 0$   
 B  $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$                        D  $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 1$

**Question 20 ♣** Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$ .                       E  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ .  
 B  $X_n \xrightarrow{L_2} 0$ .                       F  $X_n \xrightarrow{L_1} 0$ .  
 C  $X_n \xrightarrow{L_1} 1$ .                       G Aucune de ces réponses n'est correcte.  
 D  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ .



**Feuille de réponses :**

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

← codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :
.....
.....

*Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.*

- QUESTION 1 : 

A	B	C	D	E	F	G	H
---	---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 2 : 

A	B	C	D	E	F
---	---	---	---	---	---
- QUESTION 3 : 

A	B	C	D	E	F	G	H
---	---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 4 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 5 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- QUESTION 6 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 7 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 8 : 

A	B	C	D	E	F
---	---	---	---	---	---
- QUESTION 9 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 10 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 11 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 12 : 

A	B	C	D	E	F	G	H	I
---	---	---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 13 : 

A	B	C	D
---	---	---	---
- QUESTION 14 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 15 : 

A	B	C	D	E	F	G	H
---	---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 16 : 

A	B	C	D	E	F
---	---	---	---	---	---
- QUESTION 17 : 

A	B	C	D
---	---	---	---
- QUESTION 18 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---
- QUESTION 19 : 

A	B	C	D
---	---	---	---
- QUESTION 20 : 

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---



+1/6/55+